

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Victor RAIEVSKI

PREMIÈRE THÈSE :

Étude du transport des neutrons par la méthode de modulation

DEUXIÈME THÈSE :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 22 Avril 1959 devant la Commission d'examen

MM. PERRIN

Président

GRIVET

TEILLAC

YVON

HOROWITZ

} Examineurs

invité

invité

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Victor RAIEVSKI

PREMIÈRE THÈSE :

Étude du transport des neutrons par la méthode de modulation

DEUXIÈME THÈSE :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 22 Avril 1959 devant la Commission d'examen

MM. PERRIN

GRIVET

TEILLAC

YVON

HOROWITZ

Président

Examineurs

invité

invité



PROFESSEURS

DOYEN J. PERES

G. JULIA	T Analyse sup. & Algèbre sup.	NORMANT	T Chimie organique
FOCH	T Mécan. physique et expérimentale	BENARD	T Chimie (P. C. B.)
DE BROGLIE	T Théories physiques	BUVAT	T Botanique (E. N. S.)
PRENANT	T Anatomie et Histol. comparées	DUGUE	T Statistiques mathém.
PERES	T Mécan. des Fluides et applications	GELOSO	T Chimie (S. P. C. N.)
M. CURIE	T Physique (S. P. C. N.)	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
BARRABE	T Géol. struct. et Géol. appliquée	ULRICH	T Physiologie Végétale
J. BOURCART	T Géogr. physique et Géol. dynamique	MARECHAL	T Optique théorique et appliquée
PLANTEFOL	T Botanique	KIRRMANN	T Théories chimiques
GRASSE	T Evolution des êtres organisés	CHADEFAUD	T Botanique
PREVOST	T Chimie organique	DESTRIAU	T Physique (M. P. C.)
BOULIGAND	T Application de l'analyse à la Géométrie	Mlle LE BRETON	T Physiol. générale
CHAUDRON	T Chimie appliquée	SALEM	T Mathématiques Générales
WYART	T Minéralogie	LELONG	T Mathématiques Générales
TEISSIER	T Zoologie	DEVILLERS	T Anatomie et Histologie comparées
MANGENOT	T Biol. Végétale	EHRESMANN	T Topologie algébrique
P. AUGER	T Physique quantique et relativité	FRANCON	T Physique (S. P. C. N.)
MONNIER	T Physiol. générale	GLANGEAUD	T Géogr. physique et Géol. dynamique
PIVETEAU	T Paléontologie	GODEMENT	T Mathématiques (M. P. C.)
ROCARD	T Physique (E. N. S.)	PISOT	T Calcul des Probabilités
H. CARTAN	T Mathématiques (E. N. S.)	ROCH E.	T Géologie
LAFFITTE	T Chimie générale	SCHATZMANN	T Astrophysique
FAVARD	T Géométrie supérieure	TERMIER	T Paléontologie stratigraphique.
COULOMB	T Physique du Globe	ZAMANSKY	T Mathématiques Générales
Mlle COUSIN	T Biol. animale (S. P. C. N.)	LENNUIER	T Physique (M. G. P.)
CHRETIEN	T Chimie minérale	RIZET	T Génétique
P. DRACH	T Zoologie	ROUTHIER	T Géologie Appliquée
KASTLER	T Physique (E. N. S.)	Mme TONNELAT	T Phys. théor.
EPHRUSI	T Génétique	DIXMIER	T Mathématiques (M. P. C.)
WURMSER	T Biologie physico-chimique	SOUCHAY	T Chimie générale
RIVIERE	T Géologie (S. P. C. N.)	AIGRAIN	T Electrotechnique
GAUTHERET	T Biol. végétale (P. C. B.)	BRUSSET	T Chimie minérale
LUCAS	T Recherches physiques	M. LEVY	T Physique théorique
A. THOMAS	T Biologie cellulaire	Mme CHAIX	T Chimie biologique
ARNULF	T Optique appliquée	Mme HUREL-PY	T Biol. Végétale (P. C. B.)
M. MORAND	T Enseignement de Physique	PIAUX	T Chimie (P. C. B.)
SOLEILLET	T Physique	BRUN	T Mécanique expérimentale des fluides
FORTIER	T Mécanique exper. des fluides	LEDERER	T Chimie des substances organiques naturelles
DANJON	T Astronomie	Mme DUBREIL	T Mathématiques
LAPORTE	T Physique générale et Radioactivité	Mme LELONG	T Mathématiques (E. N. S.)
JANET	T Mécanique analytique et Mécanique céleste	BELLAI	T Géologie (S. P. C. N.)
PETIT	T Biologie maritime	COTTE	T Physique (M. P. C.)
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique	DUBOIS J. E.	T Chimie (S. P. C. N.)
GALLIEN	T Embryologie	LAMOTTE	T Zoologie (E. N. S.)
EICHHORN	T Biologie Végétale (S. P. C. N.)	LE ROLLAND	T Méc. des fluides
DE CUGNAC	T Biologie Végétale (S. P. C. N.)	MICHEL André	T Chimie (S. P. C. N.)
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique	OLMER	T Energétique Générale
THELLIER	T Physique du Globe	ROUAULT	T Physique Générale
L'HERITIER	T Génétique	GAUTHIER	T Méc. appliquée
GRIVET	T Radioélectricité	BARCHEWITZ	T Chimie Physique
PONCIN	T Mécanique Générale	BROSSEL	T Physique atomique
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des nombres	BUSER	T Biologie animale (P. C. B.)
QUELET	T Chimie organique	CAMUS	T Biol. Vég. (P. C. B.)
CAGNIARD	T Géophysique appliquée	CASTAING	T Physique Générale
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	CURIEN	T Minéralogie et cristallographie
CUVILLIER	T Géol. structurale et Géol. appliquée	MOYSE	T Physiologie Végétale
JUNG	T Pétrographie	NOIROT	T Evolution des êtres organisés
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique	PANNETIER	T Chimie (S. P. C. N.)
WIEMANN	T Chimie organique et structurale	POSSOMPES	T Biologie Animale (P. C. B.)
JACQUINOT	T Spectroscopie et physique céleste	PULLMANN	T Chimie Théorique
VASSY	T Physique de l'Atmosphère	TEILLAC	T Physique Nucléaire et Radioactivité
DESTOUCHES	T Théories physiques	TONNELAT	T Biol. physico-chimique
M. PRUVOST	T Géologie	VILLE	T Econométrie
AMIEL	T Chimie générale (P. C. B.)	WILLEMART	T Chimie (P. C. B.)
HOCART	T Minéralogie	DODE	T Chimie
J. P. MATHIEU	T Physique (P. C. B.)	FREYMAN	T Physique (S. P. C. N.)
COUTEAUX	T Biol. Animale (P. C. B.)	GUINOCHET	T Biol. Vég. (ORSAY)
MAY	T Biol. Animale (P. C. B.)	ROLLET	T Chimie (P. C. B.)
CHOQUET	T Calcul différentiel et intégral	Mlle JOSIEN	T Chimie (P. C. B.)
FELDMANN	T Biologie (P. C. B.)	CHEVALLEY	T Géométrie Algébrique et théorie des groupes
GUINIER	T Physique des solides	ARNOULT	T Physique (Orsay)
JOST	T Physiol. comparée	CHAPELLE	T Physique (Orsay)
FORTET	T Calcul des probabilités	DELANGE	T Mathématiques (Orsay)
SCHWARTZ	T Calcul différentiel et Intégral	DENY	T Mathématiques (Orsay)
CHOUARD	T Physiologie Végétale	GERMAIN P.	T Mécan. théor. des fluides.
MALAVARD	T Aviation	LUCAS G.	T Géologie
BRELOT	T Calcul différentiel		

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Commissariat à l'Energie Atomique et en majeure partie à la Direction des Etudes de Piles.

Je désire exprimer ma très vive reconnaissance à M. le Haut-Commissaire, le Professeur Francis Perrin, et à M. le Directeur des Etudes de Piles, le Professeur Jacques Yvon, de m'avoir donné les moyens de mener à bien cette étude de caractère général.

Je dois remercier plus particulièrement M. le Professeur Jacques Yvon d'avoir établi la première théorie des résultats parfois empiriques obtenus au début de ces expériences.

Ces études, commencées au Service de la Pile de Châtillon sous la direction de son chef, M. Jacques Ertaud, se sont poursuivies au Service de Physique Mathématique dirigé par M. Jules Horowitz.

Je dois particulièrement remercier M. Horowitz pour les discussions extrêmement fructueuses que j'ai eues avec lui dès le début de ces expériences, puis pour la collaboration qui s'est peu à peu instituée entre nous. Certaines de ces expériences, comme la mesure du libre parcours moyen de transport, sont issues de ces discussions.

Je suis heureux de pouvoir remercier M. Maurice Surdin, chef du Département d'Electronique, de m'avoir engagé à entreprendre cette thèse et de m'avoir conseillé dès le début à utiliser le principe de la détection synchrone qui m'a fait gagner un temps considérable.

Je tiens à remercier le Dr A.M. Weinberg, dont le mémoire cité au chapitre III a été pour moi une source précieuse que j'ai souvent utilisée.

Enfin je suis heureux de remercier ici les ingénieurs et agents techniques du Commissariat qui m'ont aidé dans cette tâche, MM. J. Lacour, et B. Sautiez pour la réalisation de certaines de ces expériences, et M. P. Le Baud pour la réalisation de l'appareillage électronique dans lequel il a apporté ses précieuses connaissances et réalisé des dispositifs souvent originaux.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550417_0005

INTRODUCTION

La physique des piles atomiques étudie l'intensité à l'échelle macroscopique des phénomènes dont sont le siège les milieux contenant des neutrons. La recherche de la nature de ces phénomènes est du domaine de la physique nucléaire. Celle-ci étudie les propriétés du neutron en tant que particule élémentaire dans ses interactions à l'échelle microscopique avec la matière. De l'ensemble de ces propriétés se dégage un modèle de particule, dont la physique des piles atomiques ne conserve qu'un schéma simplifié.

La détermination par le calcul de l'intensité de ces phénomènes nécessite la connaissance à chaque instant de la répartition des neutrons, en position, en vitesse et en direction, que l'on appelle plus brièvement la répartition en phase. Celle-ci est donnée par la théorie du transport. Cette théorie est commune à un grand nombre de phénomènes et a été établie bien avant la découverte du neutron, dans la cinétique des gaz. La physique des piles a cependant considérablement développé cette théorie et apporté par là une contribution importante aux autres branches de la physique.

Cette théorie est une théorie statistique, elle décrit le comportement en moyenne d'un grand nombre de particules, à partir des paramètres macroscopiques qui traduisent en langage mathématique le modèle choisi pour la particule étudiée. Ces paramètres s'obtiennent à partir de mesures élémentaires ou intégrales. Les premières sont principalement du ressort de la physique nucléaire (étude des paramètres de résonance, section efficace en fonction de l'énergie, etc.), les autres appartiennent au domaine de la physique des piles (longueurs caractéristiques, réactivité, etc.). Cette branche nouvelle de la physique permet de déterminer d'une façon quantitative certaines propriétés du neutron et contribue ainsi à préciser le modèle de cette particule.

Nous décrirons ici une méthode expérimentale permettant la mesure de certains paramètres macroscopiques en utilisant une technique de modulation.

La description en moyenne de la répartition en phase est quelquefois insuffisante pour rendre compte des phénomènes observables dans les piles, en particulier dans le cas où intervient le temps. Les déviations à partir de la répartition moyenne qui limitent la précision des mesures ont été étudiées dans le rapport CEA n°917 qui constitue un additif à cet ouvrage.

CHAPITRE I

RAPPEL DE NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Les interactions du neutron avec la matière se font par l'intermédiaire des forces nucléaires à courte portée (10^{-13} cm) et magnétique.

1) Réactions nucléaires : le choc d'un neutron sur un noyau est une réaction nucléaire. Les phénomènes observés à la suite de ces réactions dépendent du noyau et de la vitesse absolue du neutron. Les réactions nucléaires importantes dans la physique du réacteur sont les suivantes :

a) diffusion élastique : l'énergie interne du noyau n'est pas modifiée. L'énergie cinétique de l'ensemble neutron et noyau se conserve, mais avec une répartition différente après le choc. Il y a donc modification de la vitesse du neutron en direction et en amplitude.

b) diffusion inélastique : il n'y a plus conservation de l'énergie cinétique. La vitesse du neutron est également modifiée en direction et en amplitude. La perte d'énergie du neutron est en moyenne plus grande que dans le cas de la diffusion élastique.

c) capture : le neutron est absorbé par le noyau. Celui-ci subit à la suite de cette réaction nucléaire une série de transformations. L'une de ces transformations a une importance considérable, c'est la fission.

d) fission : le noyau se fissionne en éléments plus légers. La fission des noyaux lourds peut être suivie de l'émission instantanée ou différée de neutrons. Cette réaction étant fortement exothermique, la vitesse des neutrons émis peut être considérablement plus élevée que celle du neutron responsable de la fission.

e) réaction $(n, 2n)$: le noyau émet deux neutrons, cette réaction est endothermique et n'a lieu qu'avec des neutrons rapides ; elle est négligeable, sauf dans le cas du deutérium et du béryllium où les seuils de réaction sont les plus bas.

La liste de ces réactions est très limitative comparée à celle établie en physique nucléaire. En particulier, elle ignore les réactions à énergie élevée ($E > 8$ MeV), parce que le nombre de neutrons de fission d'énergie élevée est négligeable, ou la radioactivité du neutron, parce que la période (10 à 15 minutes) est très longue comparée à la vie moyenne des neutrons dans la matière (10^{-2} à 10^{-5} s).

2) Les probabilités de réaction : la probabilité d'une réaction est donnée par la valeur de la section efficace correspondante. On convient d'affecter à chaque noyau et pour chacune des réactions décrites précédemment, une section efficace $\sigma(v)$ dépendant de la vitesse initiale v du neutron. La probabilité d'une réaction quelconque par unité de temps dans un élément de volume dV avec des neutrons de vitesse v s'écrit :

$$p \, dV = N v \, \sigma(v) \, dV$$

où N est le nombre de noyaux par unité de volume. La quantité $\Sigma(v) = N \sigma(v)$ est appelée la section efficace macroscopique, son inverse est le libre parcours moyen (l.p.m.). Il représente la distance moyenne parcourue par un neutron avant de subir la réaction décrite. Les sections efficaces utilisées dans la physique des réacteurs comportent certaines simplifications que nous allons énumérer :

a) Elles ne dépendent pas de la direction initiale du neutron. Cette simplification revient à considérer le milieu comme isotrope, tout au moins l'anisotropie si elle existe ne peut intéresser qu'un élément de volume dont les dimensions linéaires sont très petites comparées au l.p.m. Les directions privilégiées de ces volumes élémentaires n'ont aucune corrélation entre elles. C'est le cas de tous les matériaux entrant dans la construction des piles. Les matériaux cristallins utilisés sont des assemblages

de petits cristaux de dimensions de l'ordre du micron et dont les directions privilégiées sont réparties au hasard. Les substances magnétiques utilisées ne peuvent introduire une anisotropie dans la diffusion magnétique que si elles sont soumises à un champ magnétique, ce qui n'est pas le cas dans les piles.

b) elles sont attachées au noyau. Pour les neutrons de faible énergie, des phénomènes de cohérence peuvent intervenir dès que la longueur d'onde du neutron est de l'ordre de grandeur des distances atomiques. C'est par exemple le cas des substances cristallines ou des molécules. Il en résulte que l'interaction subie par le neutron n'est pas égale à la somme des interactions individuelles avec chaque noyau. Néanmoins, le nombre de noyaux intéressés par ces phénomènes de cohérence est contenu dans un volume petit comparé au l.p.m. entre deux chocs et il est justifié de considérer une section efficace moyenne tenant compte de cet effet et liée à chaque noyau ou molécule.

c) elles sont des moyennes statistiques portant sur les états possibles du noyau, par exemple les vitesses d'agitation thermique. Si ces vitesses sont réparties suivant une loi de Maxwell, les sections efficaces dépendent de la température des noyaux cibles.

CHAPITRE II

THÉORIE DU TRANSPORT

A partir du modèle décrit au paragraphe I, nous pouvons déterminer à chaque instant par le calcul, la densité en phase.

Soit $N(\vec{r}, \vec{v}, t)$ la densité en phase, $N(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} dv d\vec{\Omega}$ représente le nombre de neutrons présents à l'instant t dans un élément de volume $d\vec{r}$ au point $\vec{r}$, dont les vitesses sont comprises entre v et $v + dv$ et les directions dans l'angle solide $d\vec{\Omega}$ autour de la direction $\vec{\Omega}$.

Soit $\ell_t(v)$ le l. p. m. total de choc, son inverse représente donc la probabilité de choc d'un neutron de vitesse v par unité de longueur. Soit $c_t(v') dt'$ le nombre de neutrons secondaires émis pendant l'intervalle dt' , un temps t' après le choc. Les neutrons secondaires proviennent d'après le modèle choisi, de la diffusion et de la fission.

Soit $f(v'\vec{\Omega}' \rightarrow v\vec{\Omega})$ la probabilité pour qu'un neutron secondaire ait la vitesse $v\vec{\Omega}$ quand le neutron qui lui a donné naissance a une vitesse $v'\vec{\Omega}'$.

Considérons un élément de volume dV se déplaçant à la vitesse $v\vec{\Omega}$ et qui coïncide au temps t avec l'élément dV au point $\vec{r}$. Si la densité en phase des neutrons de vitesse $v\vec{\Omega}$ n'était pas modifiée par les chocs ou l'apport des sources, on aurait :

$$N(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) = N(\vec{r} - v\vec{\Omega} dt, v\vec{\Omega}, t - dt)$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{\partial N}{\partial t} dt + \overrightarrow{\text{grad}} N \cdot v\vec{\Omega} dt = 0 \quad (2.1)$$

En fait la densité en phase évolue à cause des phénomènes décrits ci-dessus et la quantité (2.1), égale à la variation, au cours du temps de la densité en phase, est en général différente de zéro.

Calculons cette variation. Le nombre de neutrons de vitesse $v\vec{\Omega}$ éliminés du volume dV dans le temps dt à la suite d'un choc s'écrit :

$$N(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) \frac{v}{\ell_t(v)} dt \quad (2.2)$$

le nombre de neutrons de vitesse $v\vec{\Omega}$ apparaissant pendant le même intervalle de temps dt dans le volume dV , est égal au nombre de neutrons secondaires produits et à l'émission des sources, il s'écrit :

$$S(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) dt + \int \frac{v' dv'}{\ell_t(v')} \iiint_{\vec{\Omega}'} N(\vec{r}, v'\vec{\Omega}', t - t') c_t(v') dt' f(v'\vec{\Omega}' \rightarrow v\vec{\Omega}) dt' d\vec{\Omega}' \quad (2.3)$$

en utilisant les relations (2.1) (2.2) et (2.3), le bilan s'écrit :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} N + \frac{v}{\ell_t(v)} N = \int \frac{v' dv'}{\ell_t(v')} \iiint_{\vec{\Omega}'} N(\vec{r}, v'\vec{\Omega}', t - t') c_t(v') f(v'\vec{\Omega}' \rightarrow v\vec{\Omega}) dt' d\vec{\Omega}' + S \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) est l'équation de transport, ou équation de Boltzmann.

Cette équation se simplifie dans deux cas particulièrement importants qui conduisent à l'approximation des groupes de vitesse.

1) Cas des neutrons thermiques. Si on introduit des neutrons rapides dans un milieu de grande dimension, dépourvu de capture, le transfert d'énergie provoqué par les chocs de diffusion ralentit les neutrons. La durée de cette phase de ralentissement est de 10^{-4} à 10^{-5} s pour les modérateurs usuels. Lorsque l'énergie du neutron approche de l'énergie d'agitation thermique du milieu, le transfert d'énergie tend à se faire dans les deux sens et conduit à un équilibre thermodynamique. Les vitesses des neutrons se répartissent suivant une loi de Maxwell dont la température est égale à celle du modérateur.

Dans un milieu réel, la capture et les fuites limitent la vie moyenne du neutron. Cependant si cette vie est grande devant le temps de ralentissement, on peut considérer qu'un équilibre thermodynamique est encore atteint, la température des neutrons étant voisine de celle du modérateur. Cette situation se rencontre dans les modérateurs usuels et dans les piles à neutrons thermiques où la vie moyenne est comprise entre 10^{-2} et 10^{-3} s.

Dans ce cas on peut simplifier l'équation de Boltzmann en introduisant des moyennes convenablement choisies des sections efficaces, établies sur le spectre des vitesses.

Pour calculer ces moyennes nous adoptons la méthode indiquée par MM. Herpin et Saint-James [1].

Considérons le cas de l'équation de Boltzmann à une dimension, indépendante du temps et une loi de choc isotrope dans le système du laboratoire. Ces simplifications n'enlèvent rien à la généralité des résultats qui vont suivre :

L'isotropie de la loi de choc se traduit par la relation :

$$f(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi} f(v', v)$$

L'équation de Boltzmann (2.4) s'écrit dans ce cas :

$$v\mu \frac{\partial}{\partial x} N(x, \vec{v}) + \frac{v}{\ell_t(v)} N(x, \vec{v}) = \frac{1}{2} \iint \frac{v'}{\ell_t(v')} c(v') N(x, \vec{v}') f(v', v) dv' d\mu' \quad (2.5)$$

où μ est le cosinus de la direction de la vitesse.

Pour résoudre cette équation, nous allons développer la densité en polynômes de Legendre et limiter le développement aux deux premiers termes :

$$N(x, \vec{v}) = \frac{1}{2} N_0(x, v) + \frac{3}{2} \mu N_1(x, v)$$

En portant cette expression dans (2.5) on obtient l'équation suivante :

$$\left(v\mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{\ell_t(v)} \right) \left(\frac{1}{2} N_0 + \frac{3}{2} \mu N_1 \right) = \frac{1}{2} \int \frac{v' c(v')}{\ell_t(v')} N_0(x, v') f(v', v) dv' \quad (2.6)$$

en intégrant (2.6) par rapport à μ , puis en multipliant (2.6) par μ et en intégrant de nouveau par rapport à μ ; on élimine N_1 et μ . L'équation ainsi obtenue pour N_0 s'écrit :

$$\frac{v \ell_t(v)}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_0(x, v) + \frac{v}{\ell_t(v)} N_0(x, v) = \int \frac{v' c(v')}{\ell_t(v')} N_0(x, v') f(v', v) dv' \quad (2.7)$$

remarquons que la fonction f possède la propriété suivante :

$$\int_0^\infty f(v, v') dv' = 1$$

Pour les neutrons thermiques, il n'y a pas multiplication, on a donc :

$$c(v') = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_c} = \Sigma_s \ell_t$$

où Σ_s et Σ_c sont les sections macroscopiques de diffusion et de capture. Intégrons (2.7) par rapport à v . En utilisant les relations précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \frac{v \ell_t(v)}{3} N_o(v) dv + \int v \Sigma_c(v) N_o(v) dv = \iint v' \Sigma_s(v') N_o(v') f(v', v) dv' dv \\
& - \iint v \Sigma_s(v) N_o(v) f(v, v') dv' dv
\end{aligned} \quad (2.8)$$

et on obtient la relation :

$$- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int \frac{v \ell_t(v)}{3} N_o(v) dv + \int v \Sigma_c(v) N_o(v) dv = 0 \quad (2.8)$$

Si nous cherchons pour $N_o(x, v)$ une solution de la forme :

$$N_o(x, v) = e^{-\frac{x}{L}} D(v)$$

On obtient pour L la valeur suivante :

$$\frac{1}{L^2} = 3 \frac{\int \Sigma_a(v) v D(v) dv}{\int \ell_t(v) v D(v) dv} \quad (2.9)$$

la longueur de diffusion L joue un rôle important dans la théorie des piles. Elle représente en géométrie plane la distance moyenne parcourue par un neutron avant sa capture. On voit d'après (2.9) que son expression se calcule d'après la section efficace d'absorption et le libre parcours moyennés sur le spectre des vitesses. Le calcul de ces moyennes nécessite la connaissance préalable du spectre. Horowitz et Messiah [2] ont montré précédemment qu'on pouvait obtenir la relation (2.9) par une méthode variationnelle. Dans ce cas il suffit d'introduire dans (2.9) une fonction d'essai voisine de la répartition réelle. Pour les neutrons thermiques, cette fonction est donnée par la répartition de Maxwell.

La relation (2.9) est encore valable dans le cas du choc anisotrope dans le système du laboratoire, il suffit de remplacer dans ce cas le l.p.m. par le l.p.m. de transport qui sera défini au chapitre suivant.

2) Cas des neutrons en ralentissement. Décomposons le domaine des vitesses en domaines partiels à l'intérieur desquels on peut considérer que les sections efficaces sont constantes et que la valeur de l'intégrale :

$$\int f(v' \vec{\Omega} \rightarrow v \vec{\Omega}) dv = f_v(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \quad (2.10)$$

puisse être considérée comme indépendante de v' .

Dans cette intégrale on doit considérer que la fonction $f(v' \vec{\Omega} \rightarrow v \vec{\Omega})$ est nulle en dehors de l'intervalle des vitesses caractérisant le domaine considéré, puisqu'un neutron secondaire ayant une énergie différant de cet intervalle sort du domaine.

Posons :

$$\begin{aligned}
\Psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) &= \int_{v_0}^{v_1} v N(\vec{r}, v \vec{\Omega}, t) dv \\
S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) &= \int S(\vec{r}, v \vec{\Omega}, t) dv
\end{aligned}$$

avec ces notations, l'équation de transport (2.4) intégrée sur v , s'écrit :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \text{grad } \Psi + \frac{\Psi}{\ell_t} = \frac{c}{\ell_t} \iint_{\vec{\Omega}'} \Psi f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S \quad (2.11)$$

L'équation de transport (2.11) est l'approximation par groupes de vitesse. Cette approximation est constamment utilisée dans l'étude des piles thermiques, où les conditions nécessaires à son établissement sont réalisées approximativement pour les neutrons en ralentissement. Ces derniers étant peu nombreux dans ce type de pile à cause du faible rapport des temps de ralentissement et de thermalisation, et l'usage d'un ensemble de valeurs empiriques pour les grandeurs ℓ , c et $f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ obtenues à partir de résultats expérimentaux justifiant l'approximation (2.11).

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE II.

- [1] HERPIN A., SAINT-JAMES D. - Rapport SPM N° 223 (1957) *
- [2] HOROWITZ J., MESSIAH A. - Rapport SPM N° 5 (1953)

CHAPITRE III

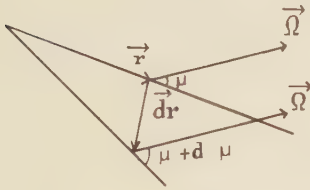
SOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSPORT DANS L'APPROXIMATION DES GROUPES DE VITESSE, PAR LA METHODE DES HARMONIQUES

Il existe plusieurs méthodes de résolution de l'équation de Boltzmann. Nous exposons ici la méthode des harmoniques d'application très générale et nous en déduisons l'approximation qui conduit à la théorie élémentaire de la diffusion. La forme de la solution dépend de la géométrie. Nous nous limiterons ici à la géométrie sphérique, l'application de la méthode au cas d'autres géométries se faisant de façon identique.

La répartition en phase en géométrie sphérique dépend des variables r et μ , r étant la distance du point à l'origine et μ le cosinus de l'angle fait par la direction du neutron au point considéré et du rayon vecteur en ce point :

$$N(\vec{r}, \vec{\Omega}) = N(r, \mu)$$

Exprimons l'opérateur $\vec{\Omega} \cdot \text{grad } N$ dans les coordonnées r, μ . Pour cela nous calculons l'accroissement de la fonction $N(\vec{r}, \vec{\Omega})$ pour un déplacement $d\vec{r}$ de direction quelconque autour de $\vec{r}$. La direction $\vec{\Omega}$ restant constante, au point $\vec{r} + d\vec{r}$, les coordonnées r et μ sont modifiées des valeurs dr et $d\mu$. Calculons ces valeurs : on voit sur la figure que l'on a :



$$dr = \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r}$$

$$\mu = \frac{\vec{r} \cdot \vec{\Omega}}{r}$$

$$\mu + d\mu = \frac{(\vec{r} + d\vec{r}) \cdot \vec{\Omega}}{r + dr}$$

d'où :

$$d\mu = \frac{\vec{\Omega} \cdot d\vec{r}}{r} - \frac{\mu}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$

Nous avons donc :

$$N(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{\Omega}) = N(r, \mu) + \frac{\partial N}{\partial r} dr + \frac{\partial N}{\partial \mu} d\mu$$

en utilisant les valeurs dr et $d\mu$ précédemment calculées ; l'accroissement dN de la fonction s'écrit :

$$dN = \left[\frac{\partial N}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} + \frac{\partial N}{\partial \mu} \left(\frac{\vec{\Omega}}{r} - \frac{\mu \vec{r}}{r^2} \right) \right] d\vec{r}$$

d'où on tire :

$$\vec{\Omega} \cdot \text{grad } N = \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu}$$

L'équation de Boltzmann (2.6) et (2.7) s'écrit donc en géométrie sphérique :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial N}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} + \frac{N}{\ell_t} = \frac{c}{\ell_t} \iint N(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\Omega' + \frac{S}{v} \quad (3.1)$$

La méthode des harmoniques consiste à développer la répartition en phase ainsi que la fonction des probabilités $f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ dans un système complet de fonctions orthogonales de la variable angulaire μ . Dans le cas de la géométrie sphérique le système est constitué par les polynômes de Legendre $P_n(\mu)$. On écrit :

$$N(r, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) N_n(r) P_n(\mu)$$

$$f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n P_n(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$$

En utilisant la propriété suivante des polynômes de Legendre la fonction des probabilités f s'exprime en fonction de μ et μ' .

$$P_n(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = P_n(\mu) P_n(\mu') + \text{termes en } \cos r \varphi \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$$S(r, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) S_n(r) P_n(\mu)$$

En utilisant cette propriété et les développements précédents, l'intégrale sur la direction $\vec{\Omega}'$ devient :

$$\iint N(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n N_n(r) P_n(\mu)$$

et l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\ell} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) N_n(r) P_n(\mu) \\ & = \frac{c}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n N_n(r) P_n(\mu) + S(r, \mu) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilisons les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Legendre ainsi que les formules de récurrence suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} P_n P_m d\mu' = \frac{2\delta_{n,m}}{2m+1}$$

$$(n+1) P_{n+1}(\mu) + n P_{n-1}(\mu) = (2n+1) \mu P_n$$

$$n \mu P_n - n P_{n-1} = (\mu^2 - 1) P_n'$$

Pour cela nous multiplions l'équation (3.2) par $(2m+1) P_m(\mu)$ et nous intégrons sur μ . En identifiant les termes en facteur des fonctions P_n , l'équation (3.2) se sépare en une infinité d'équations différentielles ne dépendant que des variables r et t .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial N_0}{\partial t} + \frac{dN_1}{dr} + \frac{2N_1}{r} + \frac{N_0}{\ell t} = \frac{c}{\ell t} b_0 N_0 + \frac{S_0}{v} \\ & \frac{3}{v} \frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{dN_0}{dr} + \frac{2dN_2}{dr} + \frac{6N_2}{r} + \frac{3N_1}{\ell t} = \frac{3c}{\ell t} b_1 N_1 + \frac{3S_1}{v} \\ & \frac{5}{v} \frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{2}{v} \frac{\partial N_1}{\partial r} + 3 \frac{\partial N_3}{\partial r} + \frac{12N_3}{r} + \frac{2N_1}{r} + \frac{5N_2}{\ell t} = \frac{5c}{\ell t} b_2 N_2 + \frac{5S_2}{v} \end{aligned} \quad (3.3)$$

La suite des équations (3.3) permet en principe de trouver la solution de l'équation de Boltzmann. Dans la pratique on utilise des développements limités de la fonction de répartition en phase et de la fonction des probabilités, il en résulte que le système (3.3) est fini. Le degré d'approximation dépend du nombre de termes retenus. On appelle approximation P_n , l'approximation qui consiste à ne retenir que les polynômes jusqu'à l'ordre n et les n premières équations. Il suffit pour obtenir cette approximation de considérer dans (3.3) comme nuls tous les termes N_{n+m} où $m > 0$.

Validité de l'approximation P_n . Les polynomes de Legendre sont des fonctions oscillantes dont le nombre d'oscillations est égal à l'ordre. Les polynomes d'ordre le plus faible représentent donc correctement des fonctions lentement variables de la variable angulaire ce qui est le cas pour les positions éloignées de toute discontinuité génératrice d'anisotropie. L'approximation d'ordre le plus faible peut être utilisée pour représenter la répartition asymptotique (pratiquement plusieurs l.p.m. à partir d'une discontinuité. L'approximation P_1 est très utilisée ; elle conduit à la théorie élémentaire de la diffusion que nous allons exposer maintenant.

Approximation P_1 . Dans l'approximation P_1 , le système (3.3) s'écrit :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial N_0}{\partial t} + \partial_0 N_1 + \frac{1 - c b_0}{\ell_t} N_0 = \frac{S_0}{v} \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{\ell} (1 - c b_1) \right] N_1 + \frac{v}{3} \frac{\partial N_0}{\partial r} = S_1 \quad (2)$$

où :

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}$$

Appliquons l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{\ell} (1 - c b_1)$ à l'équation (1) et ∂_0 à l'équation (2) et retranchons, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - c b_1} \frac{v}{3} \nabla^2 N_0 - \frac{1 - c b_0}{\ell_t} v N_0 &= \frac{\ell_t}{1 - c b_1} \frac{1}{v} \frac{\partial^2 N_0}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{1 - c b_0}{1 - c b_1} \right) \frac{\partial}{\partial t} N_0 \\ &+ \left(1 + \frac{\ell_t}{1 - c b_1} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_0 - \frac{\ell_t}{1 - c b_1} \partial_0 S_1 \end{aligned}$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ est l'opérateur laplacien écrit en géométrie sphérique. Examinons de plus près dans cette expression les termes $\frac{\ell_t}{1 - c b_0}$ et $\frac{\ell_t}{1 - c b_1}$.

Si le milieu n'est pas multiplicateur en neutrons thermiques, ce qui est physiquement le cas, les neutrons de fission étant émis avec des énergies très grandes devant l'énergie d'agitation thermique, on a :

$$c = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}$$

d'après le développement de la fonction des probabilités :

$$f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) b_n P_n(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}')$$

On a :

$$b_0 = \iint f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = 1$$

$$b_1 = \iint f(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' d\vec{\Omega}' = \bar{\mu}$$

où $\bar{\mu}$ est la valeur moyenne du cosinus de l'angle de déviation. On a donc :

$$\frac{1 - c b_0}{\ell_t} = \Sigma_c \quad \lambda_t = \frac{\ell_t}{1 - c b_1} = \frac{\ell_t}{1 - \bar{\mu} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}}$$

On appelle cette dernière expression le l.p.m. de transport λ_t . Dans ces conditions l'équation de Boltzmann dans l'approximation P_1 s'écrit :

$$\frac{\lambda_t v}{3} \nabla^2 N_0 - \Sigma_c v N_0 = \frac{\lambda_t}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} N_0 + (1 + \lambda_t \Sigma_c) \frac{\partial N_0}{\partial t} - \left(1 + \frac{\lambda_t}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_0$$

$$\left(1 + \frac{\lambda_t}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right) N_1 = -\frac{\lambda_t}{3} \text{grad } N_0 + \lambda_t \partial_0 S_1 \quad (3.4)$$

$$N(r, \mu) = \frac{1}{2} (N_0 + 3\mu N_1)$$

L'équation élémentaire de la diffusion. La théorie élémentaire de la diffusion permet d'obtenir directement l'équation (3.4), moyennant quelques hypothèses simplificatrices :

1) La théorie ignore la répartition angulaire des neutrons, elle ne peut donc rendre compte de l'anisotropie introduite par la loi de choc et par les sources :

$$\lambda_t = \ell_t$$

$$S_1 = 0$$

2) Elle néglige le temps de parcours entre deux chocs :

$$\frac{\lambda_t}{v} = 0$$

3) Elle suppose l'absorption très faible devant la diffusion :

$$\lambda_t \Sigma_c \ll 1$$

Si on fait ces hypothèses simplificatrices, les relations (3.4) s'écrivent :

$$\frac{\ell_t v}{3} \nabla^2 N_0 - \Sigma_c v N_0 = \frac{\partial N_0}{\partial t} - S_0 \quad (3.4)$$

Montrons rapidement comment on obtient cette équation d'après les premiers principes.

Considérons un milieu où règne une densité de neutrons $N_0(\vec{r}, t)$ entretenue par des sources $S_0(\vec{r}, t)$. Calculons le bilan des neutrons dans un élément de volume dV de ce milieu.

Le courant de neutrons à travers un élément de surface dS de ce milieu est :

$$J = -\frac{\lambda_s v}{3} \text{grad } N_0$$

La différence entre le nombre de neutrons sortant et entrant dans l'élément de volume dans le temps dt après avoir subi un choc de diffusion, a pour valeur :

$$\frac{\lambda_s v}{3} \nabla^2 N_0 dV dt$$

Le nombre de neutrons absorbés s'écrit :

$$- \Sigma_c v N_0 dV dt$$

d'où le bilan :

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} = \frac{\lambda_s v}{3} \nabla^2 N_0 - \Sigma_c v N_0 + S_0$$

ce qui est bien l'équation (3.4).

Nous utiliserons désormais cette équation, mais en introduisant le libre parcours moyen de transport, ainsi que les moyennes des sections efficaces obtenues dans la théorie à un groupe.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRES II et III.

DAVISON B. - Neutron Transport Theory Oxford - at the Clarendon Press (1957).

WEINBERG A. M., NODERER L. C. - Theory of neutron chain reactions ORNL (1951)

WEINBERG A. M., SCHWEINLER H. C. - Theory of oscillating absorber in a chain reactor - Phys. Rev. 1948, 74, p. 851.

YVON J. - Eléments de physique statistique chapitre III - cours de Saclay.

CHAPITRE IV

LA THÉORIE DES PILES A NEUTRONS THERMIQUES DANS L'APPROXIMATION DE LA DIFFUSION A DEUX GROUPES DE VITESSE

Une pile à neutrons thermiques est un assemblage de matériaux fissiles et modérateur qui forme le coeur et dans lequel s'entretient la réaction en chaîne. Un modérateur sans élément fissile entoure le coeur et joue le rôle d'un réflecteur, ce dispositif permet de diminuer la perte par fuite des neutrons, d'une façon plus économique que par l'augmentation du volume du coeur.

Dans le coeur et le modérateur d'une pile à neutrons thermiques, le rapport des durées des phases thermique et de ralentissement est compris entre 10 et 1 000. Il y a donc accumulation des neutrons dans la phase thermique. Comme de plus la section efficace de fission est environ 100 fois plus grande que dans la phase de ralentissement, il en résulte que la réaction en chaîne est entretenue principalement par les neutrons thermiques.

L'émission des neutrons dans le phénomène de fission est instantanée. Certains fragments de fission cependant émettent des neutrons à la suite d'une transformation radioactive. La probabilité d'apparition de ces fragments est faible, mais leur effet est important pour la cinétique des piles. On peut distinguer plusieurs groupes d'émetteurs de neutrons retardés, caractérisés par leur abondance relative β_i et leur constante de temps d'émission λ_i .

Les neutrons émis à la suite de la fission appartiennent au groupe rapide et vont subir le phénomène de ralentissement. Si E_c est l'énergie séparant les domaines thermique et de ralentissement, les chocs de diffusion successifs vont abaisser l'énergie des neutrons en-dessous de cette coupure, tout se passe comme si le neutron disparaissait du groupe rapide, la fréquence de cette disparition est représentée par une section efficace de capture fictive, dite section de ralentissement. Bien entendu, les neutrons disparaissant du groupe rapide par ce processus, doivent apparaître en totalité comme sources dans le groupe thermique. La fission provoquée par les neutrons thermiques, donne de nouveaux neutrons rapides. On a ainsi un cycle caractérisé par le facteur de multiplication k , égal au rapport du nombre de neutrons au début et à la fin de chaque cycle dans un milieu multiplicateur infini, et une durée moyenne égale à la somme des vies moyennes du neutron dans les groupes thermique et en ralentissement. Dans un milieu fini, les fuites diminuent ce facteur, on l'appelle alors le facteur de multiplication effectif k_e .

Dans le processus du ralentissement nous avons négligé la capture, celle-ci est en moyenne très faible sauf pour certaines énergies dites de résonance, où l'absorption atteint des valeurs très élevées. Cette absorption est due principalement à l'uranium-238. Dans la théorie à deux groupes, on fixe cette absorption à l'énergie de coupure E_c par l'introduction d'un facteur antitrappe p égal à la probabilité pour un neutron rapide d'échapper à cette capture. Ce point de vue est justifié par le fait que la résonance la plus importante se trouve à 7 ev.

On écrit les équations de diffusion pour les deux groupes, dans le coeur et le réflecteur. Les fonctions de répartition et leurs dérivées premières doivent satisfaire à des conditions de continuité qui traduisent physiquement que la densité et le courant des neutrons sont continus.

Liste des symboles. Les indices 1 et 2 correspondent aux groupes rapide et thermique, les indices c et r se rapportent au coeur et au réflecteur.

$D = \frac{\lambda_t}{3}$: coefficient de diffusion.

Σ_c : section efficace macroscopique d'absorption.

$L^2 = \frac{D}{\Sigma_c}$: longueur caractéristique.

k : facteur de multiplication.

- k_e : facteur de multiplication effectif.
 p : facteur antitrappe.
 C_i, β_i, λ_i : concentration, abondance relative et constante de temps des émetteurs de neutrons retardés du groupe i .
 $\beta = \sum \beta_i$: proportion des neutrons retardés par fission.
 $\phi = Nv$: flux de neutrons.
 S : source de neutrons autre que la fission.

Equation de diffusion pour les groupes rapide et thermique dans le coeur et le réflecteur [1].

La variation au cours du temps de la densité des neutrons rapides $\frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$, par unité de volume est due :

- à la diffusion de ces neutrons à travers la surface limitant ce volume $D_{1c} \nabla^2 \phi_{1c}$.
- au ralentissement, représenté par une absorption fictive $-\Sigma_{1c} \phi_{1c}$.
- aux neutrons secondaires instantanés émis après une fission thermique $\frac{k}{p} (1 - \beta) \Sigma_{2c} \phi_{2c}$.
- à l'émission de neutrons retardés par les émetteurs $\sum \lambda_i C_i$.
- aux sources.

La variation au cours du temps de la densité des neutrons thermiques est due à la diffusion, à l'absorption, aux neutrons ralentis en provenance du groupe rapide et aux sources.

La variation de la concentration des émetteurs de neutrons retardés est due à l'apparition de ces émetteurs à la suite de la fission, et à leur décroissance radioactive.

Le bilan pour les groupes et les émetteurs dans le coeur s'écrit :

$$I \begin{cases} D_{1c} \nabla^2 \phi_{1c} - \Sigma_{1c} \phi_{1c} + \frac{k}{p} (1 - \beta) \Sigma_{2c} \phi_{2c} + \sum \lambda_i C_i + S_{1c} = \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_{1c}}{\partial t} \\ D_{2c} \nabla^2 \phi_{2c} - \Sigma_{2c} \phi_{2c} + p \Sigma_{1c} \phi_{1c} + S_{2c} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_{2c}}{\partial t} \\ - \lambda_i C_i + \frac{k}{p} \beta_i \Sigma_{2c} \phi_{2c} = \frac{\partial C_i}{\partial t} \end{cases}$$

Dans le réflecteur, il n'y a pas de fission, donc pas d'émetteur de neutrons retardés. Le bilan pour les groupes dans le réflecteur s'écrit :

$$I \begin{cases} D_{1r} \nabla^2 \phi_{1r} - \Sigma_{1r} \phi_{1r} + S_{1r} = \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_{1r}}{\partial t} \\ D_{2r} \nabla^2 \phi_{2r} - \Sigma_{2r} \phi_{2r} + \Sigma_{1r} \phi_{1r} + S_{2r} = \frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_{2r}}{\partial t} \end{cases}$$

Les flux, solutions du système I, satisfont aux conditions aux limites suivantes :

continuité du flux et du courant à la surface de séparation du coeur et du réflecteur :

$$\phi_{1c} = \phi_{1r}$$

$$\phi_{2c} = \phi_{2r}$$

$$D_{1c} \text{grad } \phi_{1c} = D_{1r} \text{grad } \phi_{1r} \quad (4.1)$$

$$D_{2c} \text{grad } \phi_{2c} = D_{2r} \text{grad } \phi_{2r}$$

flux nuls dans le vide :

$$\phi_{1r} = \phi_{2r} = 0$$

Les équations I et les conditions aux limites (4.1) permettent de calculer en tout point les flux de neutrons. D'après ce que nous avons exposé précédemment ces répartitions représentent correctement les répartitions réelles loin des discontinuités. Le groupe rapide ne doit pas être considéré comme une réalité physique, mais comme un moyen de calcul permettant de connaître d'une façon plus précise la répartition du groupe thermique.

Equation matricielle. Il est commode d'écrire les équations du système I sous forme matricielle. Considérons :

Le vecteur ϕ dont les composantes ϕ_1 et ϕ_2 représentent les flux rapide et thermique dans la pile, satisfaisant aux conditions aux limites (4.1).

Le vecteur S dont les composantes sont les sources rapides et thermiques S_1 , S_2 dans la pile.

La matrice M,

$$M = \begin{vmatrix} D_{1c} \nabla^2 - \Sigma_{1c} & \frac{k}{p} \Sigma_{2c} \\ p \Sigma_{1c} & D_{2c} \nabla^2 - \Sigma_{2c} \end{vmatrix} \quad \text{cœur}$$

$$M = \begin{vmatrix} D_{1r} \nabla^2 - \Sigma_{1r} & 0 \\ \Sigma_{1r} & D_{2r} \nabla^2 - \Sigma_{2r} \end{vmatrix} \quad \text{réflecteur}$$

Nous allons écrire dans le cas statique, l'équation matricielle équivalente au système I.

Si les flux et les concentrations de neutrons retardés sont indépendants du temps, les seconds membres des équations du système I sont nuls et l'on obtient :

$$\Sigma \lambda_i C_i = \frac{k}{p} \beta \Sigma_{2c} \phi_{2c} \quad (4.2)$$

portons cette valeur dans la première équation du système I, il vient :

$$\begin{aligned} \text{cœur} \quad & \begin{cases} (D_{1c} \nabla^2 - \Sigma_{1c}) \phi_{1c} + \frac{k}{p} \Sigma_{2c} \phi_{2c} = -S_{1c} \\ p \Sigma_{1c} \phi_{1c} + (D_{2c} \nabla^2 - \Sigma_{2c}) \phi_{2c} = -S_{2c} \end{cases} \\ \text{réflecteur} \quad & \begin{cases} (D_{1r} \nabla^2 - \Sigma_{1r}) \phi_{1r} + 0 \phi_{2r} = -S_{1r} \\ \Sigma_{1r} \phi_{1r} + (D_{2r} \nabla^2 - \Sigma_{2r}) \phi_{2r} = -S_{2r} \end{cases} \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$M \phi = -S \quad (4.3)$$

La solution de l'équation (4.3) peut s'obtenir directement dans certains cas, cette méthode sera exposée au chapitre VII. Dans le cas général, la solution est obtenue sous la forme d'un développement dans les fonctions propres de l'opérateur M, qui doivent former un système de base complet.

Choix du système de base. Considérons les fonctions propres de l'équation :

$$M \phi = \lambda \alpha_\tau \phi \quad (4.4)$$

La matrice α_τ est la même dans le cœur et le réflecteur :

$$\alpha_\tau = \begin{vmatrix} \frac{1}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Les fonctions ϕ sont nulles à l'extérieur de la pile, et les conditions de continuité à la surface de séparation du coeur et du réflecteur, s'écrivent sous forme matricielle.

$$\begin{aligned} \phi_c &= \phi_r \\ \text{grad} \begin{vmatrix} D_{1c} & 0 \\ 0 & D_{2c} \end{vmatrix} \phi_c &= \text{grad} \begin{vmatrix} D_{1r} & 0 \\ 0 & D_{2r} \end{vmatrix} \phi_r \end{aligned} \quad (4.6)$$

L'ensemble des fonctions propres de l'équation (4.4) satisfaisant aux conditions (4.6) forme un système complet. L'opérateur M n'étant pas self adjoint, ce système n'est pas orthogonal. Introduisons l'équation matricielle adjointe [2].

$$\tilde{M} \phi^+ = \lambda^+ \alpha_\tau \phi^+ \quad (4.7)$$

Les fonctions propres de ce système satisfaisant aux conditions de continuité (4.6), on peut écrire :

$$\langle \phi^+ M \phi - \phi \tilde{M} \phi^+ \rangle_{\text{pile}} = 0$$

On en déduit :

$$\lambda_j \langle \phi_j^+ \alpha_\tau \phi_i \rangle_{\text{pile}} - \lambda_i^+ \langle \phi_i \alpha_\tau \phi_j^+ \rangle_{\text{pile}} = 0$$

On montrera par la suite que $\lambda_j^+ = \lambda_j$, ce qui permet d'écrire la condition d'orthogonalité, sous la forme :

$$\langle \phi_j^+ \alpha_\tau \phi_i \rangle_{\text{pile}} = \langle \phi_j^+ \alpha_\tau \phi_j \rangle_{\text{pile}} \delta_{ij} \quad (4.8)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, nul pour $i \neq j$ et égal à l'unité pour $i = j$.

Si on exprime (4.8) en fonction des composantes des vecteurs ϕ , on obtient :

$$\langle \phi_j^+ \alpha_\tau \phi_i \rangle_{\text{pile}} = \frac{1}{V_1} \int_{\text{pile}} \phi_{j1}^+ \phi_{i1} dV + \frac{1}{V_2} \int_{\text{pile}} \phi_{j2}^+ \phi_{i2} dV \quad (4.9)$$

Calcul des fonctions propres. Pour résoudre le système (4.4), considérons le vecteur V de composantes X et Y dans le coeur, Z_1, Z_2 dans le réflecteur, solution de l'équation.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{vmatrix} V &= - \begin{vmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & \nu^2 \end{vmatrix} V && \text{coeur} \\ \begin{vmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{vmatrix} V &= - \begin{vmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{vmatrix} V && \text{réflecteur} \end{aligned}$$

μ^2, ν^2, k_1^2 et k_2^2 sont des constantes, le vecteur V est régulier dans le coeur et nul à l'extérieur de la pile, et posons :

$$\begin{aligned} \phi &= A V \\ A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} && \text{coeur} \\ A &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} && \text{réflecteur} \end{aligned}$$

Si nous portons cette expression de ϕ dans l'équation (4.4), on peut identifier séparément les termes dépendant de X et Y et l'on obtient les relations suivantes :

$$(1 + L_{1c}^2 B^2 + \lambda \tau_{1c}) (1 + L_{2c}^2 B^2 + \lambda \tau_{2c}) = k \quad (4.10)$$

où B^2 peut prendre les valeurs μ^2 ou ν^2 et $\tau^{-1} = \nu \Sigma_c$

$$S_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{p \Sigma_{1c}}{k \Sigma_{2c}} (1 + L_{1c}^2 \mu^2 + \lambda \tau_{1c})$$

$$S_2 = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{p \Sigma_{1c}}{k \Sigma_{2c}} (1 + L_{1c}^2 \nu^2 + \lambda \tau_{1c})$$

puis dans le réflecteur :

$$1 + L_{1r}^2 k_1^2 + \lambda \tau_{1r} = 1 + L_{2r}^2 k_2^2 + \lambda \tau_{2r} = 0$$

$$S_3 = \frac{a'_{21}}{a'_{11}} = \frac{\Sigma_{1r}}{\Sigma_{2r}} \frac{1}{L_{2r}^2 (k_1^2 - k_2^2)}$$

$$a'_{12} = 0$$

Les fonctions ϕ dépendent alors de quatre paramètres A, C, F, G et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{vmatrix} A & C \\ S_1 A & S_2 C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X(\mu) \\ Y(\nu) \end{vmatrix} & \text{coeur} \\ \phi &= \begin{vmatrix} F & 0 \\ S_3 F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_1(k_1) \\ Z_2(k_2) \end{vmatrix} & \text{réflecteur} \end{aligned}$$

Les conditions de continuité (4.6) fournissent quatre équations qui permettent d'éliminer les paramètres A, C, F, G et fournissent l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} &\left(D_{1c} \frac{X'}{X} - D_{1r} \frac{Z'_1}{Z_1} \right) \left(S_2 D_{2c} \frac{Y'}{Y} - S_3 D_{2r} \frac{Z'_1}{Z_1} - D_{2r} (S_2 - S_3) \frac{Z'_2}{Z_2} \right) \\ &- \left(D_{1c} \frac{Y'}{Y} - D_{1r} \frac{Z'_1}{Z_1} \right) \left(S_1 D_{2c} \frac{X'}{X} - S_3 D_{2r} \frac{Z'_1}{Z_1} - D_{2r} (S_1 - S_3) \frac{Z'_2}{Z_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

où la notation $\frac{X'}{X}$ représente la dérivée logarithmique de la fonction X.

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{X} \left| \text{grad } X \right|$$

L'équation (4.11) dépend de λ , μ^2 , ν^2 , ces deux derniers paramètres étant les solutions des équations (4.10), on voit que (4.10) et (4.11) permettent de calculer la suite des valeurs propres de λ , on en déduit les fonctions propres ϕ .

On écrira donc les vecteurs propres sous la forme :

$$\begin{aligned} \phi_j &= \begin{vmatrix} A_j & C_j \\ S_{1j} A_j & S_{2j} C_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X(\mu_j) \\ Y(\nu_j) \end{vmatrix} & \text{coeur} \\ \phi_j &= \begin{vmatrix} F_j & 0 \\ S_{3j} F_j & G_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_1(k_{1j}) \\ Z_2(k_{2j}) \end{vmatrix} & \text{réflecteur} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Les solutions adjointes ϕ_j^+ de l'équation (4.7) se calculent de façon identique.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE IV.

- [1] GLASSTONE S., EDLUND M.C. - The elements of nuclear reactor theory - Van Nostrand 1952.
- [2] Mc MURRY H.L. - AECD 3656.

CHAPITRE V

LA PERTURBATION PÉRIODIQUE

Les paramètres décrivant le transport des neutrons sont obtenus expérimentalement. La méthode que nous décrivons ici permet de déduire ces valeurs de l'observation de la partie modulée du flux de neutrons provoquée par une perturbation périodique de ces paramètres ou des sources.

La modulation conduit toujours à deux variables observables : l'amplitude et le déphasage par rapport à la cause perturbatrice. L'introduction des nombres complexes permet de simplifier l'analyse mathématique du phénomène.

En régime sinusoïdal, les flux peuvent être séparés en une partie constante et une partie variable :

$$\phi = \bar{\phi} + \delta \phi \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

La non linéarité des équations de la diffusion dans le cas d'une perturbation des paramètres engendre des termes harmoniques. Ces termes harmoniques sont d'autant plus faibles que la perturbation est petite, et on peut représenter le flux sous la forme plus simple :

$$\phi = \bar{\phi} + \delta \phi e^{i\omega t}$$

Cette forme est valable pour les faibles perturbations, elle est rigoureuse dans le cas où la perturbation périodique est due aux sources. Nous nous plaçons toujours dans ces cas. Quand on effectue une perturbation périodique dans la pile, les flux de neutrons rapides et thermiques et les émetteurs de neutrons retardés oscillent en synchronisme avec la perturbation. Nous allons établir l'équation matricielle à laquelle satisfait la partie variable du flux, de même fréquence que la perturbation.

La perturbation la plus générale est obtenue en perturbant les éléments de la matrice M et en introduisant une source périodique de neutrons rapides et thermiques.

$$M = \bar{M} + \delta M e^{i\omega t}$$

$$S = \bar{S} + \delta S e^{i\omega t}$$

où le signe barre représente la partie statique de la matrice et de la source, dont l'expression a été donnée au chapitre précédent, et les δ , la partie oscillante qui doit être considérée comme une grandeur complexe, donnant la phase et l'amplitude de l'oscillation.

Les flux et les concentrations des émetteurs s'écrivent de même :

$$\phi = \bar{\phi} + \delta \phi e^{i\omega t}$$

$$c_i = \bar{c}_i + \delta c_i e^{i\omega t}$$

Les seconds membres du système I ne sont plus nuls, mais s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \delta \quad (5.1)$$

La relation équivalente à (4.2) devient :

$$\sum \lambda_i c_i = \beta \frac{k}{p} \sum_{2c} \phi_{2c} + \sum \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + i\omega} \delta \frac{k \sum_{2c} \phi_{2c}}{p}$$

dans laquelle $\delta \frac{k \sum_{2c} \phi_{2c}}{p}$ représente la partie oscillante de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ du produit $\frac{k \sum_{2c} \phi_{2c}}{p}$.

En portant cette expression dans la première équation du système I, et en écrivant :

$$\sum \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + i\omega} - \beta = \sum \left(\frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i + i\omega} - \beta_i \right) = -i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}$$

il est aisé de voir que la partie variable du flux satisfait à l'équation matricielle suivante :

$$M_c \delta \phi = -\delta S - \delta M_c \phi \quad (5.3)$$

où la matrice M_c s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{coeur} & M_c = \begin{vmatrix} D_{1c} \nabla^2 - \Sigma_{1c} - \frac{i\omega}{v_1} & \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{k \sum_{2c} \phi_{2c}}{p} \\ p \Sigma_{1c} & D_{2c} \nabla^2 - \Sigma_{2c} - \frac{i\omega}{v_2} \end{vmatrix} \\ \text{réflecteur} & M_c = \begin{vmatrix} D_{1r} \nabla^2 - \Sigma_{1r} - \frac{i\omega}{v_1} & 0 \\ \Sigma_{1r} & D_{2r} \nabla^2 - \Sigma_{2r} - \frac{i\omega}{v_2} \end{vmatrix} \end{array}$$

et δM_c est la matrice de perturbation obtenue en perturbant les éléments de la matrice M_c .

Nous appellerons M_c la matrice cinétique. On voit que cette matrice se déduit de la matrice statique M définie au chapitre IV :

$$M_c = M - i\omega \alpha_r - i\omega P \quad (5.4)$$

L'expression de la matrice α_r est donnée en (4.5), la matrice P s'écrit :

$$P = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k \sum_{2c} \phi_{2c}}{p} \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{coeur} \\ \text{réflecteur} \end{array} \quad (5.5)$$

$$P = 0 \quad \text{réflecteur}$$

La solution de l'équation (5.3) peut s'obtenir sous forme d'un développement des flux et des sources dans un système de base. Ce développement est avantageux quand la fréquence est faible, l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur statique M fournit ce système.

Quand la fréquence augmente, le nombre de termes du développement nécessaires pour représenter correctement la solution augmente également, une solution directe de l'équation (5.3) lorsqu'elle est possible est alors avantageuse. Cette solution sera donnée au chapitre VII.

Cas des faibles fréquences $\omega/v_2 \sum_{2c} \phi_{2c} \ll 1$ - développement dans le système de base statique : en utilisant les expressions (5.4) et (5.5) l'équation (5.3) s'écrit :

$$| M - i\omega \alpha_r - i\omega P | \delta \phi = -\delta S - \delta M_c \phi \quad (5.6)$$

développons la partie variable du flux dans le système de base statique :

$$\delta \phi = \sum a_i \phi_i \quad (5.7)$$

Multiplions scalairement par ϕ_j^+ l'équation (5.6), il vient :

$$\langle \phi_j^+ | M - i\omega \alpha_r - i\omega P | \sum a_i \phi_i \rangle_{pile} = - \langle \hat{\phi}_j | \delta S + \delta M_c \phi \rangle_{pile} \quad (5.8)$$

les termes de gauche de cette expression peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \langle \phi_j^+ | M - i\omega \alpha_r | \phi_i \rangle &= (\lambda_i - i\omega) \langle \phi_j^+ \alpha_r \phi_i \rangle_{pile} \delta_{ij} \\ \langle \phi_j^+ | -i\omega P | \phi_i \rangle &= -i\omega \int_{coeur} \phi_{j1} \phi_{i2} dV \end{aligned}$$

posons :

$$\begin{aligned} \theta_j &= \frac{p}{k \Sigma_{2c}} \frac{\langle \phi_j^+ \alpha_r \phi_j \rangle_{pile}}{\int_{coeur} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \\ K_{ij} &= \frac{\int_{coeur} \phi_{j1}^+ \phi_{i2} dV}{\int_{coeur} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \end{aligned}$$

la relation (5.8) s'écrit :

$$a_j (\lambda_j - i\omega) \theta_j - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \sum a_i K_{ij} = - \frac{p}{k \Sigma_{2c}} \frac{\langle \phi_j^+ | \delta S + \delta M_c \phi \rangle_{pile}}{\int_{coeur} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \quad (5.10)$$

L'ensemble des équations (5.10) permet de déterminer les coefficients a_j du développement (5.7) de $\delta\phi$. Cet ensemble est infini. Il faut pour le résoudre limiter le nombre de termes dans le développement. Par exemple si on se limite au terme fondamental, l'équation (5.10) donne pour le coefficient a_0 :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= a_0 \phi_0 \\ a_0 &= - \frac{1}{(\lambda_0 - i\omega) \theta_0 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}} \frac{p}{k \Sigma_{2c}} \frac{\langle \phi_0^+ | \delta S + \delta M_c \phi \rangle_{pile}}{\int_{coeur} \phi_{o1}^+ \phi_{o2} dV} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Remarque. Pour une pile critique, une des valeurs propres λ est nulle. Le terme θ_0 prend la valeur θ qui joue un rôle important dans la cinétique des piles où il représente la vie moyenne des neutrons. Donnons son expression à partir de (5.9) :

$$\theta = \frac{1}{k \Sigma_{2c} v_2} \frac{\int_{pile} \left(\phi_{o2}^+ \phi_{o2} + \frac{v_2}{v_1} \phi_{o1}^+ \phi_{o1} \right) dV}{\int_{coeur} \phi_{o1}^+ \phi_{o2} dV}$$

Le terme θ_0 apparaît dès que l'état de la pile s'écarte de l'état critique. Il diffère d'autant plus de θ que la pile est loin de l'équilibre.

Système de base approché - Le système de base de l'équation (4.4) conduit à des calculs difficiles dès que l'on veut évaluer l'ordre de grandeur des harmoniques. Dans ce cas il est préférable d'introduire un système de base incomplet mais conduisant à des calculs plus simples dont l'usage sera justifié au chapitre VII. Un système particulièrement intéressant est constitué par l'ensemble des fonctions propres de l'équation :

$$\begin{aligned} M\phi &= \lambda \alpha_k \phi \\ \alpha_k &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{k \Sigma_{2c}}{p} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{coeur} \\ \alpha_k &= 0 & \text{réflecteur} \end{aligned}$$

Ce système conduit à rechercher la suite des valeurs du coefficient de multiplication k rendant la pile critique.

On peut donc écrire :

$$\lambda_j = \frac{k_j - k}{k}$$

Dans le réflecteur ce système est impropre à représenter les solutions harmoniques puisqu'il conduit à une solution unique dans ce milieu.

Dans le coeur, l'approximation est d'autant meilleure que la contribution des neutrons rapides est plus faible.

Un avantage pratique considérable résulte du fait que les calculs sur les machines digitales sont programmés dans ce système [1].

Pour le calcul du mode fondamental d'une pile critique, le choix de la matrice α est indifférent, puisque la valeur propre correspondante est nulle.

Le système de base approché conduit à la condition d'orthogonalité suivante :

$$\langle \phi_j^+ | \alpha_k | \phi_i \rangle = B_j \delta_{ij}$$

avec :

$$B_j = -\frac{k \Sigma_{2c}}{p} \int_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV$$

On aura d'ailleurs pour toute matrice dégénérée du type :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{coeur}$$

$$A = 0 \quad \text{réflecteur}$$

la condition d'orthogonalité :

$$\langle \phi_j^+ | A | \phi_i \rangle = A_j \delta_{ij}$$

avec :

$$A_j = a_{12} \int_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV$$

Nous remarquons que la matrice P de l'équation (5.6) est une matrice dégénérée du type α_k . Multiplions scalairement cette équation par les fonctions propres ϕ_j^+ de l'équation adjointe de ce nouveau système, il vient :

$$\langle \phi_j^+ | M - i\omega P | \phi_i \rangle = -\left(\frac{k_j - k}{k} + \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}\right) \frac{k \Sigma_{2c}}{p} \int_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV$$

$$\langle \phi_j^+ | -i\omega \alpha_r | \phi_i \rangle = -i\omega \left[\frac{1}{v} \int_{\text{pile}} \phi_{j1}^+ \phi_{i1} dV + \frac{1}{v_2} \int_{\text{pile}} \phi_{j2}^+ \phi_{i2} dV \right]$$

posons :

$$\theta_{j1} = \frac{p}{k \Sigma_{2c} v_2} \frac{\int_{\text{pile}} \phi_{j2}^+ \phi_{i2} dV + \frac{v_2}{v_1} \int_{\text{pile}} \phi_{j1}^+ \phi_{i1} dV}{\int_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \quad (5.9)'$$

La relation (5.10) s'écrit dans ce nouveau système :

$$a_j \left(\frac{k_j - k}{k} + i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) + i\omega \Sigma a_i \theta_{j1} = \frac{p}{k \Sigma_{2c}} \frac{\langle \phi_j^+ | \delta S + \delta M_c \phi \rangle_{\text{pile}}}{\int_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \quad (5.10)'$$

Si on limite le développement au terme fondamental, l'équation (5.10)' conduit à la valeur suivante de a_o :

$$a_o = \frac{1}{\frac{k_o - k}{k} + i\omega \left(\theta_{oo} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right)} \frac{\frac{p}{k \Sigma_{2c}} \langle \phi_o^+ | \delta S + \delta M_c \phi \rangle_{pile}}{\int_{coeur} \phi_{o1}^+ \phi_{o2} dV} \quad (5.11)$$

Pour une pile en moyenne critique, θ_{oo} est identique à la vie moyenne θ définie en (5.12) et les relations (5.11) et (5.11)' sont identiques.

Nous utiliserons désormais le système de base approché pour le calcul du fondamental et l'évaluation de l'ordre de grandeur des harmoniques, sauf au chapitre VII où le développement (5.7) sera identifié à la solution directe.

Application au cas de la perturbation périodique du coefficient de multiplication - Supposons que le coefficient de multiplication oscille périodiquement autour d'une valeur moyenne $\bar{k}$.

$$k = \bar{k} + \delta k e^{i\omega t}$$

la matrice de perturbation δM_c s'écrit dans ce cas :

$$\delta M_c = \begin{pmatrix} 0 & \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{\Sigma_{2c}}{p} \delta k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{coeur} \\ \text{réflecteur} \end{matrix}$$

la matrice δM_c est une matrice dégénérée du type α_k . Développons le flux statique ϕ dans le système de base approché :

$$\phi = \sum_i b_i \phi_i$$

la propriété de la matrice δM_c permet d'écrire :

$$\langle \phi_j^+ | \delta M_c | \sum b_i \phi_i \rangle = b_j \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{\Sigma_{2c}}{p} \delta k \int_{coeur} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV$$

les relations (5.10)' s'écrivent dans ce cas :

$$a_j \left(\frac{k_j - k}{k} + i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) + i\omega \sum a_i \theta_{ji} = - \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{\delta k}{k} b_j \quad (5.13)$$

Développement limité au premier terme :

$$\delta \phi = a_o \phi_o$$

les relations (5.13) donnent pour a_o la valeur :

$$a_o = \frac{\delta k}{i\omega k} \frac{b_o}{\theta_{oo} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}} \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \quad (5.14)$$

Développement limité au second terme :

$$\delta \phi = a_o' \phi_o + a_1' \phi_1$$

les relations (5.13) s'écrivent :

$$a_o' \left(\theta_{oo} + \frac{k_o - k}{i\omega k} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) + a_1' \theta_{o1} = \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{\delta k}{i\omega k} b_o$$

$$a_o' \theta_{10} + a_1' \left(\theta_{11} + \frac{k_1 - k}{i\omega k} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) = \left(1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) \frac{\delta k}{i\omega k} b_1$$

la solution de ce système s'écrit :

$$\begin{aligned}
 a'_0 &= (1 - i \omega \Sigma_1) \frac{\delta k}{i \omega k} \frac{b_0 \left(\theta_{11} + \Sigma_1 + \frac{k_1 - k}{i \omega k} \right) - b_1 \theta_{01}}{\left(\theta_{00} + \Sigma_1 + \frac{k_0 - k}{i \omega k} \right) \left(\theta_{11} + \Sigma_1 + \frac{k_1 - k}{i \omega k} \right) - \theta_{01} \theta_{10}} \\
 a'_1 &= (1 - i \omega \Sigma_1) \frac{\delta k}{i \omega k} \frac{b_1 \left(\theta_{00} + \Sigma_1 + \frac{k_0 - k}{i \omega k} \right) - b_0 \theta_{10}}{\left(\theta_{00} + \Sigma_1 + \frac{k_0 - k}{i \omega k} \right) \left(\theta_{11} + \Sigma_1 + \frac{k_1 - k}{i \omega k} \right) - \theta_{01} \theta_{10}} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\Sigma = \lambda \frac{\beta_1}{\lambda_1 + i \omega}$$

Approximations - Pour les faibles fréquences :

$$\Sigma \frac{\beta_1}{\lambda_1 + i \omega} \cong \Sigma \frac{\beta_1}{\lambda_1} \cong 10^{-1} \text{ sec.}$$

$$\theta_{j1} \cong \frac{P}{k \Sigma_{2c} v_2} \cong 10^{-3} \text{ sec.}$$

On peut donc négliger les θ_{j1} devant Σ_1 .

On peut négliger $i \omega \Sigma_1$ devant l'unité.

De plus si la pile est critique en moyenne on a :

$$k_0 = k$$

$$b_1 = 0$$

donc on peut négliger $\frac{k_0 - k}{i \omega k}$ devant Σ_1 .

Dans ces conditions (5.14) s'écrit :

$$a_0 \cong \frac{\delta k}{i \omega k} \frac{b_0}{\Sigma_1} \quad (5.16)$$

et (5.15) devient :

$$\begin{aligned}
 a'_0 &\cong \frac{\delta k}{i \omega k} \frac{b_0}{\Sigma_1} \\
 a'_1 &\cong - \frac{\delta k}{i \omega k} \frac{b_0}{\Sigma_1} \frac{\theta_{10}}{\Sigma_1 + \frac{k_1 - k_0}{i \omega k}} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

on voit que le terme fondamental n'est pas modifié, et que l'harmonique a une influence négligeable.

En conclusion, lorsque le facteur de multiplication est modifié d'une façon périodique dans une pile, au voisinage de la criticalité, les flux de neutrons oscillent suivant le mode fondamental. Ce résultat est dû au fait que la perturbation envisagée affecte le cœur d'une façon homogène, il n'en est plus de même lorsque la perturbation affecte localement la pile, c'est par exemple le cas d'un absorbeur localisé. Ce cas particulièrement important dans la pratique sera traité au chapitre suivant.

Génération de termes harmoniques due à la non linéarité des équations. Nous avons indiqué au début de ce chapitre que la non linéarité des équations donnait naissance à des termes harmoniques, négligeables pour une faible perturbation. Il est utile, particulièrement dans les expériences de cinétique de pile de s'assurer que cette condition est bien réalisée.

Pour fixer les idées, prenons le cas d'une pile sans neutrons retardés, où nous provoquons une perturbation périodique du coefficient de multiplication. L'équation de la cinétique pour le nombre total de neutrons n , s'écrit :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(t) - 1}{\theta} n$$

dont la solution est :

$$n = A e^{\int \frac{k-1}{\theta} dt}$$

On voit sous cette forme qu'une perturbation périodique purement sinusoïdale du facteur de multiplication ne donne pas une modulation purement sinusoïdale du nombre de neutrons.

Plus précisément, si le développement en série de Fourier de la réactivité s'écrit :

$$k - 1 = k_1 \sin \omega t + k_2 \sin 2 \omega t + \dots \quad (5.18)$$

on aura :

$$n = A e^{-\frac{k_1}{\omega \theta} \cos \omega t - \frac{k_2}{2\omega \theta} \cos 2 \omega t - \dots}$$

Développons cette expression en série de Fourier :

$$n(t) = n_0 + n_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + n_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (5.19)$$

On obtient pour le terme fondamental :

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k_1}{\omega \theta} \left(1 - \frac{k_1^2}{8 \omega^2 \theta^2} - \frac{k_2}{4 \omega \theta} - \dots \right) \quad (5.20)$$

Si on avait négligé la non linéarité des équations, on aurait obtenu pour ce terme fondamental, l'expression :

$$\left(\frac{n_1}{n_0} \right) = \frac{k_1}{\omega \theta}$$

La relation (5.20) montre ainsi la forme des termes correctifs.

Dans une pile réelle, la valeur numérique des corrections ainsi introduites est considérablement modifiée par l'existence des neutrons retardés.

Le calcul de ces corrections dans le cas réel est fait de la façon suivante [2] :

Ecrivons l'équation de la cinétique sous forme intégrale :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k(1 - \beta) - 1}{\theta} n + \frac{1}{\theta} \sum_i \beta_i \lambda_i \int_0^\infty k(t - \tau) n(t - \tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau$$

et introduisons dans cette équation les développements (5.18) et (5.19), limités au second harmonique. En identifiant terme à terme, on obtient des expressions analogues à (5.20) pour l'amplitude et le déphasage du terme fondamental qui est seul mesuré dans ces expériences :

$$\frac{n_1}{n_0} = \left(\frac{n_1}{n_0} \right)_0 \left[1 + \frac{N_1}{8 \omega^2 \theta^2} k_1^2 + \frac{N_2}{4 \omega \theta} k_2 \right] \quad (5.21)$$

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{\psi_1}{8 \omega^2 \theta^2} k_1^2 + \frac{\psi_2}{2 \omega \theta} k_2$$

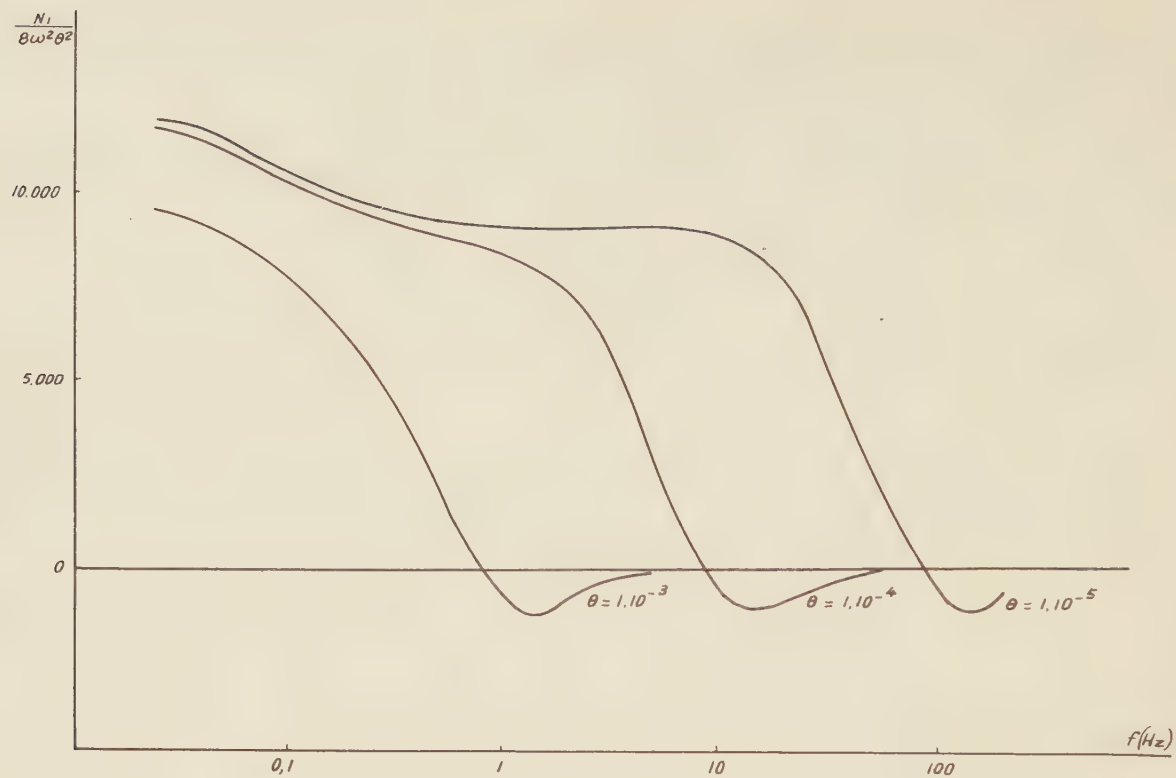


Fig. V1

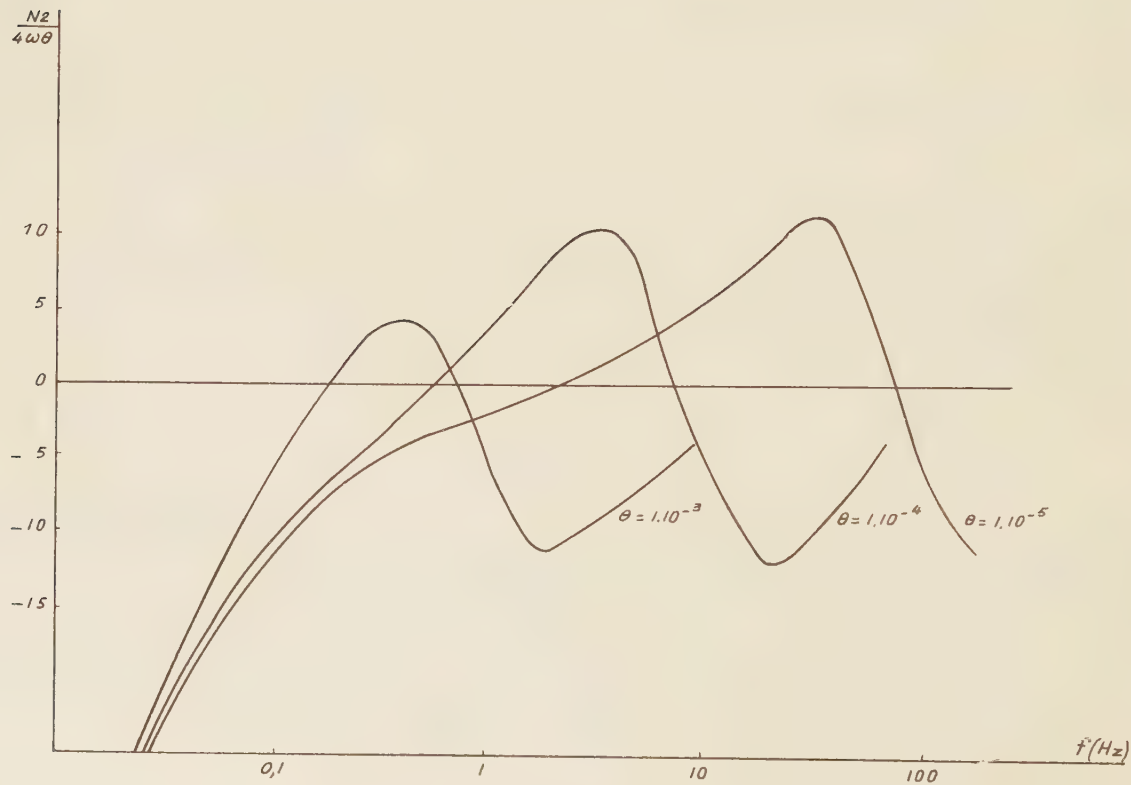


Fig. V2

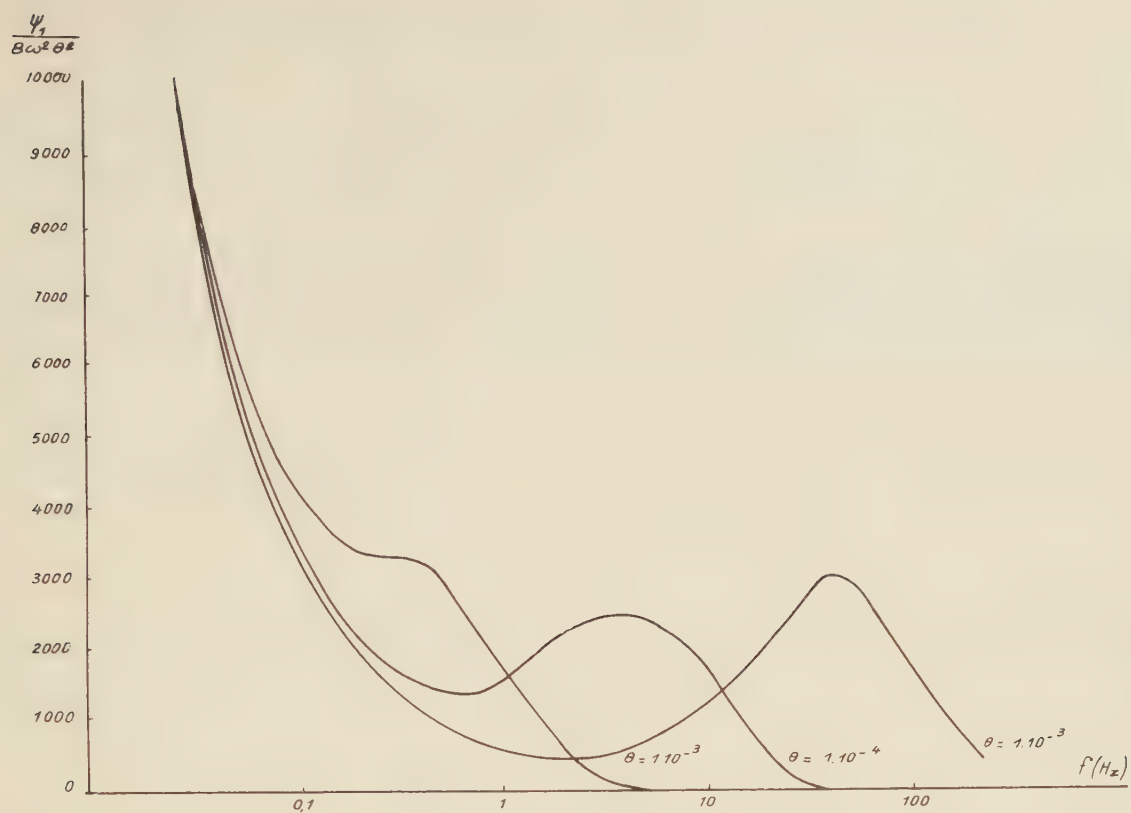


Fig. V3

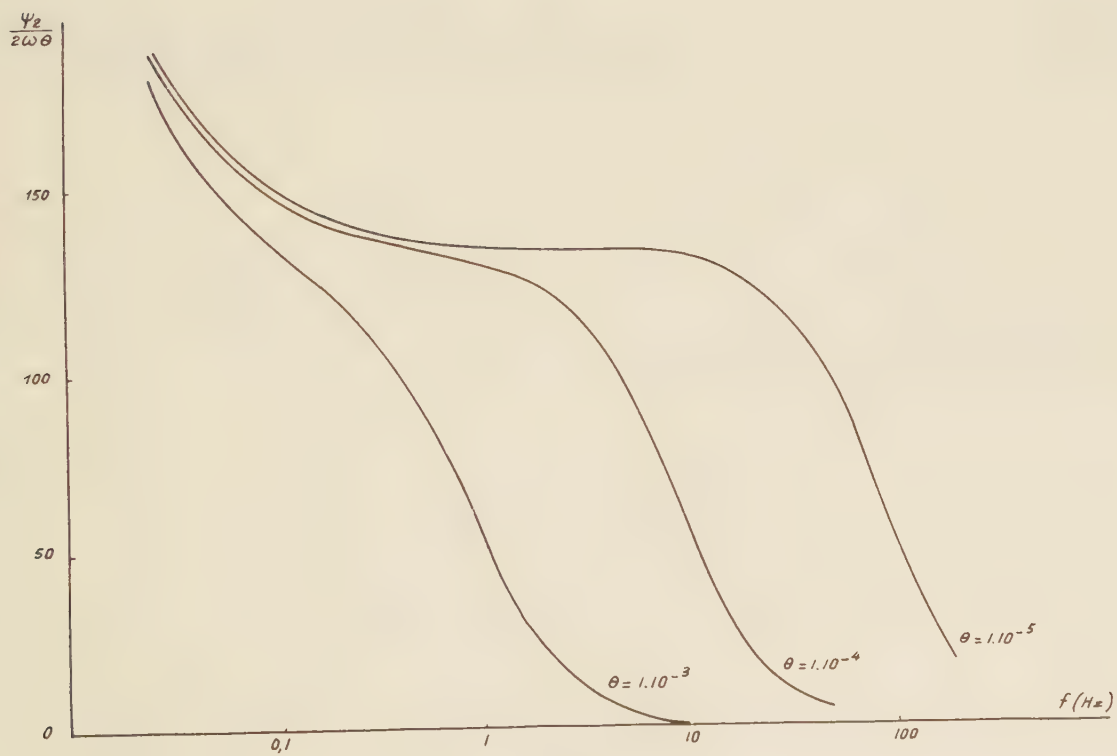


Fig. V4

$\left(\frac{n_1}{n_0}\right)$ et φ_0 sont l'amplitude et le déphasage du terme fondamental calculés en négligeant la non linéarité des équations.

Les expressions $\frac{N_1}{8 \omega^2 \theta^2}$, $\frac{N_2}{4 \omega \theta}$, $\frac{\psi_1}{8 \omega^2 \theta^2}$, $\frac{\psi_2}{2 \omega \theta}$ sont représentées sur les courbes V 1 à 4 pour des fréquences de modulation variant de $2,5 \cdot 10^{-2}$ à 200 HZ et des vies moyennes de neutrons θ égales à 10^{-3} , 10^{-4} et 10^{-5} sec.

Exemple numérique. Considérons une pile où la vie moyenne des neutrons prompts est de 10^{-5} sec. On provoque une perturbation périodique du facteur de multiplication avec une fréquence égale à $2,5 \cdot 10^{-2}$ HZ. On veut déterminer la valeur maximum permise de cette perturbation afin que les termes correctifs pour l'amplitude soient inférieurs à 1 % et l'erreur sur la phase inférieure à 1° .

Sur les courbes V 1 à 4 on lit :

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{8 \omega^2 \theta^2} &= 1,2 \cdot 10^4 & \frac{\psi_1}{8 \omega^2 \theta^2} &= 1,11 \cdot 10^4 \\ \frac{N_2}{4 \omega \theta} &= -27 & -\frac{\psi_2}{2 \omega \theta} &= 193 \end{aligned}$$

D'où on en déduit :

erreur inférieure à 1 % sur l'amplitude

$$k_1 \leq 90 \cdot 10^{-5}$$

$$k_2 \leq 35 \cdot 10^{-5}$$

erreur inférieure à 1° sur le déphasage

$$k_1 \leq 125 \cdot 10^{-5}$$

$$k_2 \leq 10 \cdot 10^{-5}$$

Remarque : Les corrections les plus importantes pour le déphasage sont dues au deuxième harmonique de la perturbation que l'on peut diminuer ou même éliminer par un choix approprié du modulateur.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE V.

- [1] LAGO B. - Rapport SPM n° 400.
- [2] PONTIS C., RAIEVSKI V. - Rapport SPM n° 566.
Voir aussi FARGES G., RAIEVSKI V. - Rapport SPM n° 564.

CHAPITRE VI

PERTURBATION DUE A UN ABSORBEUR

En un point $\vec{r}_0$ de la pile, et dans un élément de volume V_a pouvant être considéré comme petit devant celui de la pile, modifions la section efficace d'absorption des neutrons thermiques, de la valeur Σ_a .

Posons (1)

$$S_a = \Sigma_a V_a$$

La section d'absorption des neutrons thermiques dans la pile ainsi perturbée dépend maintenant de la position et prend la forme suivante :

$$\Sigma'_{2c} = \Sigma_{2c} + S_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \text{ si } \vec{r}_0 \text{ dans le coeur}$$

$$\Sigma'_{2r} = \Sigma_{2r} + S_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \text{ si } \vec{r}_0 \text{ dans le réflecteur}$$

Si l'absorbeur est dans le coeur, le facteur de multiplication qui dépend de l'absorption est également modifié dans le volume V_a .

Si Σ_{uc} représente la section d'absorption des neutrons thermiques par l'uranium, le facteur de multiplication peut s'écrire :

$$k = \eta \frac{\Sigma_{uc}}{\Sigma_{2c}}$$

où η est une constante indépendante de Σ_{2c} .

Sous cette forme, on voit que le produit $k \Sigma_{2c}$ qui apparait dans la matrice M est indépendant de la perturbation et on peut écrire la matrice de perturbation :

$$\delta M_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -S_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

cette forme étant valable quelle que soit la position $\vec{r}_0$ de l'absorbeur dans la pile.

1) Absorbeur statique. La pile étant critique ($k = k_0$) avant la mise en place de l'absorbeur, calculons la variation de k qui rendrait de nouveau la pile critique avec l'absorbeur.

La matrice statique perturbée M' peut s'écrire :

$$M' = M + P_k + P_\Sigma$$

où P_Σ a pour expression (6.1) et :

$$P_k = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\Sigma_{2c}}{P} \delta k \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{coeur}$$

$$P_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{réflecteur}$$

(1) Si l'absorbeur est introduit dans le coeur d'une pile hétérogène, sa section d'absorption doit être moyennée dans la cellule, en pondérant par la valeur moyenne des flux de neutrons thermiques.

La relation (4.4) s'écrit pour le terme fondamental de ϕ :

$$\langle \phi_0 | (P_k + P_\Sigma) \phi \rangle = 0$$

qui donne :

$$\frac{\delta k}{k} = \frac{p}{k} \frac{S_a}{\Sigma_{2c}} \frac{\phi_{02}^+(\vec{r}_0) \phi_2(\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{coeur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV} \quad (6.2)$$

où $\phi_2(\vec{r}_0)$ est le flux thermique en $\vec{r}_0$ après la perturbation.

2) Absorbeur d'amplitude oscillante. La matrice de perturbation (6.1) s'écrit :

$$\delta M_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -S_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) e^{i\omega t} \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

Portons cette expression dans le second membre des équations (5.10)' il vient :

$$\langle \phi_j^+ | \delta M_c | \phi \rangle = -S_a \phi_{j2}^+(\vec{r}_0) \phi_2(\vec{r}_0)$$

et les équations (5.10)' s'écrivent :

$$a_j \left(\frac{k_j - k}{k} + i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} + i\omega \Sigma a_i \theta_{ji} \right) = \frac{p S_a}{k \Sigma_{2c}} \frac{\phi_{j2}^+(\vec{r}_0) \phi_2(\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \quad (6.4)$$

3) Absorbeur de position oscillante. La matrice de perturbation (6.1) s'écrit :

$$\delta M_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -S_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}) \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

le vecteur $\vec{\rho}$ représente l'amplitude et la direction de l'oscillation.

Contrairement aux perturbations périodiques étudiées précédemment, la valeur moyenne sur une période d'oscillation de la matrice de perturbation (6.5) est différente de zéro. Nous devons séparer la partie statique et cinétique de la perturbation, et seule cette dernière doit être conservée dans le second membre de (5.10)'. Celui-ci s'écrit :

$$\langle \phi_j^+ | \delta M_c | \phi \rangle = -S_a \phi_{j2}^+ \phi_2(\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t})$$

où le second membre représente la valeur du produit $\phi_{j2}^+ \phi_2$ au point $\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}$.

La valeur moyenne de ce produit représente la perturbation statique qui a pour valeur :

$$S_a \phi_{j2}^+ \phi_2(\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}) = S_a \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{j2}^+ \phi_2(\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}) dt \quad (6.6)$$

et la partie oscillante s'écrit :

$$\delta S_a \phi_{j2}^+ \phi_2(\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}) = S_a \vec{\rho} \underset{\vec{r}_0}{\text{grad}} \phi_{j2}^+ \phi_2 \quad (6.7)$$

La relation (6.6) montre qu'en général l'effet moyen de l'absorbeur oscillant est différent de celui qu'il aurait au repos dans sa position moyenne $\vec{r}_0$.

En utilisant (6.7) les relations (5.10)' pour la partie variable du flux s'écrivent :

$$a_j \left(\frac{k_j - k}{k} + i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) + i\omega \Sigma a_i \theta_{ji} = \frac{p S_a}{k \Sigma_{2c}} \frac{\vec{\rho} \underset{\vec{r}_0}{\text{grad}} \phi_{j2}^+ \phi_2}{\iiint_{\text{coeur}} \phi_{j1}^+ \phi_{j2} dV} \quad (6.8)$$

Remarque. La perturbation due au déplacement périodique d'un absorbeur d'amplitude constante S_a est équivalente à celle produite par trois absorbeurs identiques, dont deux oscillent en opposition de phase aux points $\vec{r}_0 + \frac{\vec{\rho}}{2}$ et $\vec{r}_0 - \frac{\vec{\rho}}{2}$ et le troisième reste au repos au point $\vec{r}_0'$ donné par la relation suivante :

$$\phi_{j2}^+ \phi_2 (\vec{r}_0') = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{j2}^+ \phi_2 (\vec{r}_0 + \vec{\rho} e^{i\omega t}) dt$$

Si la perturbation statique représentée par l'absorbeur au repos en $\vec{r}_0'$ est importante, il est préférable de choisir comme système de base statique, l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur statique perturbé, qui s'écrit :

$$(M + \delta M) \phi = \lambda \alpha \phi \quad (4.4)'$$

où :

$$\delta M = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -S_a \delta (\vec{r} - \vec{r}_0') \end{vmatrix}$$

la relation (4.4)' remplaçant ainsi la relation (4.4).

Ce système de base s'impose en particulier dans le cas des piles de grand volume, comme les piles au graphite, où la perturbation statique doit être importante afin que le signal soit détectable.

4) Domaine de validité du développement dans le système de base statique. Le système de base statique n'est intéressant que pour les basses fréquences. A mesure que la fréquence augmente, la contribution des harmoniques devient plus importante et la représentation correcte de la partie oscillante du flux nécessite un nombre de termes croissant. Nous allons calculer la fréquence à partir de laquelle l'amplitude du premier harmonique est de l'ordre de grandeur du terme fondamental. Nous considérons le cas de l'absorbeur d'amplitude oscillante, dans une pile en moyenne critique ($k = k_0$) :

Développement limité au premier terme :

$$\delta \phi = a_0 \phi_0$$

les relations (6.4) permettent d'écrire :

$$a_0 = \frac{p S_a}{i\omega k \Sigma_{2c}} \frac{1}{\theta_{00} + \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}} \frac{\phi_{02}^+ \phi_2 (\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV} \quad (6.9)$$

Développement limité au second terme :

$$\delta \phi = a_0' \phi_0 + a_1' \phi_1$$

les relations (6.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} a_0' \left(\theta_{00} + \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) + a_1' \theta_{01} &= \frac{p S_a}{i\omega k \Sigma_{2c}} \frac{\phi_{02}^+ \phi_2 (\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV} \\ a_0' \theta_{10} + a_1' \left(\theta_{11} + \frac{k_1 - k}{i\omega k} + \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) &= \frac{p S_a}{i\omega k \Sigma_{2c}} \frac{\phi_{12}^+ \phi_2 (\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV} \end{aligned} \quad (6.10)$$

les relations (6.10) sont semblables aux relations (5.15), mais le terme analogue b_1 est maintenant de l'ordre de grandeur du terme b_0 et ne peut plus être négligé.

Calculons d'après (6.10) le rapport $\frac{a_1'}{a_0'}$ et posons :

$$c(\vec{r}_0) = \frac{\phi_{12}^+ (\vec{r}_0)}{\phi_{02}^+ (\vec{r}_0)} = \frac{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV}$$

Il vient pour la contribution relative de l'harmonique et du fondamental de la distribution des neutrons thermiques en un point $\vec{r}$ de la pile :

$$\eta = \frac{a_1' \phi_{12}(\vec{r})}{a_0' \phi_{02}(\vec{r})} = \frac{\phi_{12}(\vec{r})}{\phi_{02}(\vec{r})} \frac{\left(\theta_{00} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right) c - \theta_{10}}{\left(\theta_{11} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} + \frac{k_1 - k_0}{i\omega k_0} \right) - c \theta_{01}} \quad (6.11)$$

La relation (6.11) permet de calculer pour un point d'oscillation $\vec{r}_0$ et un point de mesure $\vec{r}$, la fréquence à partir de laquelle la contribution de l'harmonique ne peut plus être négligée. Remarquons que a_1' et a_0' étant des grandeurs complexes, la relation (6.11) tient compte du déphasage entre l'harmonique et le fondamental.

Approximation. Il est intéressant de comparer à ce point de vue les différentes piles.

Négligeons θ_{10} au numérateur et θ_{11} , $\sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}$ et c devant $\frac{k_1 - k_0}{i\omega k_0}$ au dénominateur. La forme approchée de (6.11) s'écrit :

$$\eta \approx \frac{k}{k_1 - k_0} \frac{\iint_{\text{coeur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV}{\iiint_{\text{coeur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV} \frac{\phi_{12}^+(\vec{r}_0) \phi_{12}(\vec{r})}{\phi_{02}^+(\vec{r}_0) \phi_{02}(\vec{r})} i\omega \left(\theta_{00} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right)$$

posons :

$$K = \frac{k_0}{k_1 - k_0} \frac{\iint_{\text{coeur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV}{\iiint_{\text{coeur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV}$$

$$\varphi(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{\phi_{12}^+(\vec{r}_0) \phi_{12}(\vec{r})}{\phi_{02}^+(\vec{r}_0) \phi_{02}(\vec{r})} \quad (6.12)$$

$$\psi(\omega) = i\omega \left(\theta_{00} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right)$$

Avec ces notations, la forme approchée de (6.11) s'écrit :

$$\eta \approx K \varphi(\vec{r}_0, \vec{r}) \psi(\omega)$$

Dans cette relation, le facteur K ne dépend que de la pile, il est d'autant plus petit que la pile est petite. On peut le voir aisément dans le cas d'une pile sphérique. Si R est le rayon de la pile et M la longueur de migration on a :

$$k_0 = 1 + \pi^2 \frac{M^2}{R^2}$$

$$k_1 = 1 + 9\pi^2 \frac{M^2}{R^2}$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{k_0}{k_1 - k_0} = 0,125 \frac{k_0}{k_0 - 1} \quad (6.14)$$

Le facteur K est donc d'autant plus petit que le terme de fuite $k_0 - 1$ est plus élevé.

Application numérique. Nous allons appliquer ces considérations au cas d'un absorbeur d'amplitude oscillante dans une pile au graphite. Les caractéristiques de cette pile sont voisines de E.D.F. 1.

Dimensions : Hauteur du coeur : H = 470 cm ; rayon du coeur : R = 257 cm ; réflecteur de graphite : épaisseur infinie.

Valeur des paramètres :

	coeur	réflecteur
D_1	1,35	1,60
D_2	1,0	1,10
$\bar{z}_1$	$0,296 \cdot 10^{-2}$	$0,296 \cdot 10^{-2}$
$\bar{z}_2$	$0,278 \cdot 10^{-2}$	$0,277 \cdot 10^{-2}$
k	1,084	0
p	0,914	1
$\frac{v_2}{v_1}$	0,12	0,12

Le calcul a été fait sur une calculatrice IBM 650. Les courbes représentant la répartition radiale des flux et des flux adjoints rapides et thermiques pour le fondamental et le premier harmonique radial sont représentées sur les figures (VI. 1) et (VI. 2).

Echelle arbitraire

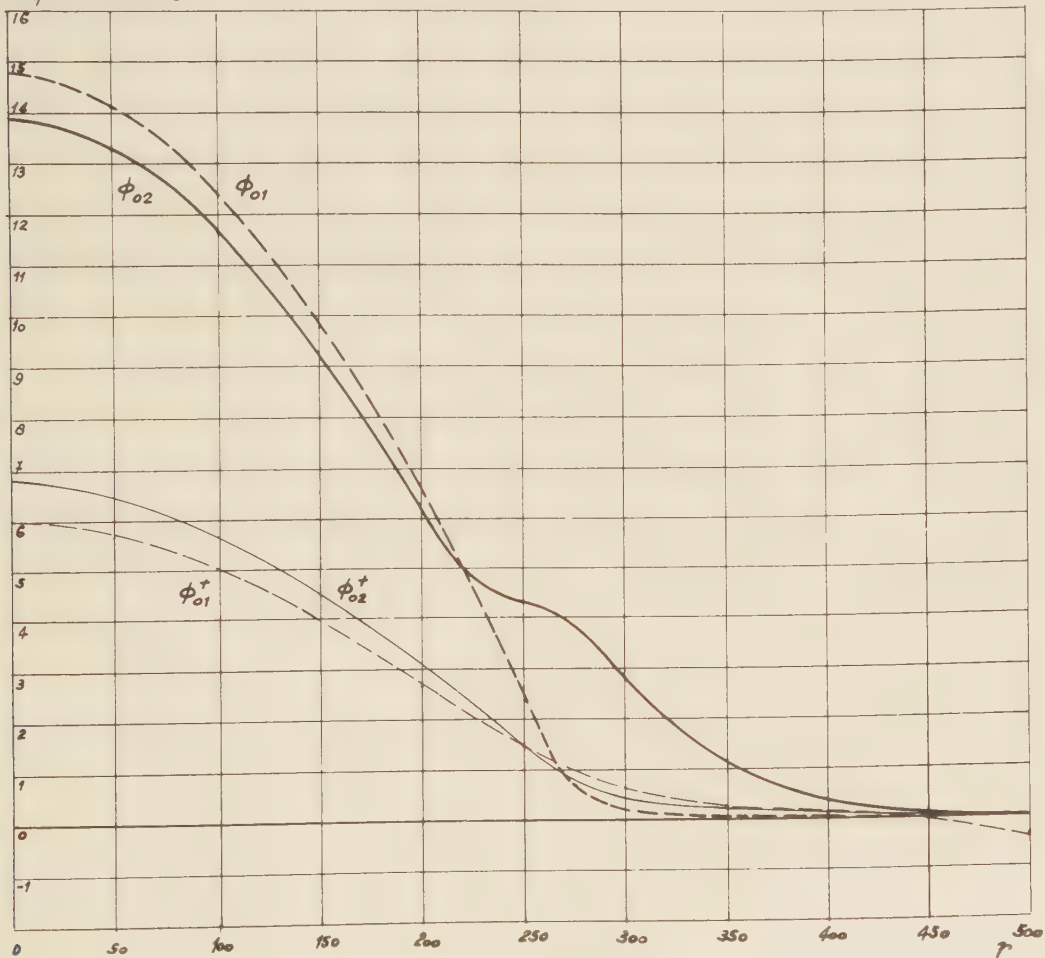


Fig. VI. 1 - Répartition du flux et du flux adjoint rapide et thermique suivant le mode fondamental.

Echelle arbitraire

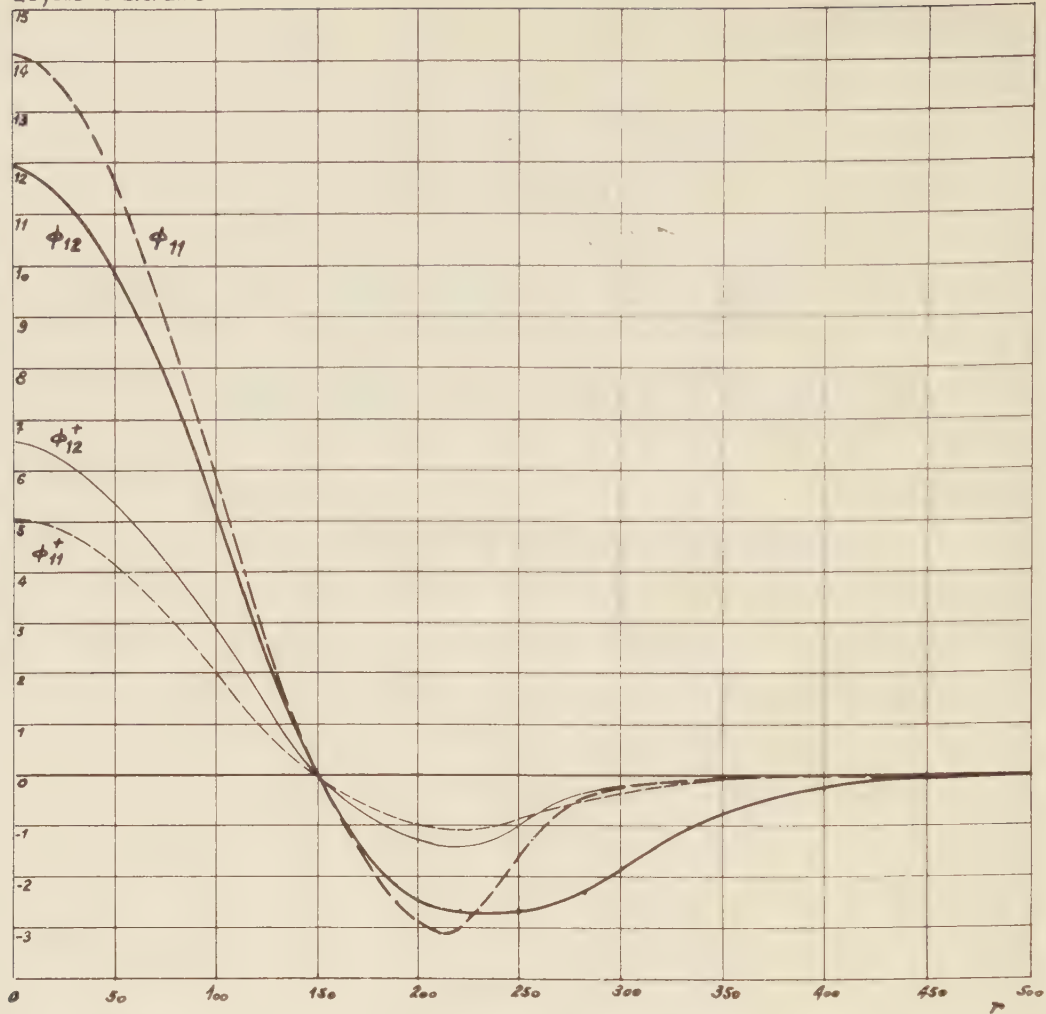


Fig. VI. 2 - Répartition du flux et du flux adjoint rapide et thermique suivant le premier mode harmonique.

On obtient les valeurs suivantes :

$$k_0 = 1,084$$

$$k_1 = 1,383$$

$$\iiint_{\text{coeur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV = 9,4 \cdot 10^5 \quad \iiint_{\text{coeur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV = 4,15 \cdot 10^6$$

$$\theta_{00} = 1,715 \cdot 10^{-3} \quad \theta_{01} = -0,468 \cdot 10^{-3} \quad \theta_{10} = -0,132 \cdot 10^{-3} \quad \theta_{11} = 1,700 \cdot 10^{-3}$$

Les flux et les flux adjoints au centre ont pour valeur :

$$\begin{array}{ll} \phi_{01} = 0,0295 & \phi_{01}^+ = 0,0120 \\ \phi_{02} = 0,0277 & \phi_{02}^+ = 0,0137 \\ \phi_{11} = 0,142 & \phi_{11}^+ = 0,0505 \\ \phi_{12} = 0,119 & \phi_{12}^+ = 0,0661 \end{array}$$

Avec ces données on peut calculer les seconds membres de (6.10), pour un absorbeur au centre, il vient :

$$\frac{p S_a}{k \Sigma_{2c}} \frac{\phi_{o2}^+ \phi_2(0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{o1}^+ \phi_{o2} dV} = 1,225 \cdot 10^{-7} S_a$$

$$\frac{p S_a}{k \Sigma_{2c}} \frac{\phi_{12}^+ \phi_2(0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{11}^+ \phi_{12} dV} = 2,41 \cdot 10^{-7} S_a$$

Calculons pour différentes fréquences la valeur numérique du terme dépendant des neutrons retardés :

$$\Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} = A - iB$$

f	ω	$10^3 A$	$10^3 B$	$10^3 i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}$
0,25	1,57	0,666	3,71	5,82 + 1,045 i
0,5	3,14	0,213	1,96	6,15 + 0,67 i
1	6,28	0,0613	1,00	6,28 + 0,386 i
5	31,4	0,0026	0,20	6,36 + 0,015 i

On voit d'après ce tableau que le produit varie peu avec la fréquence dans le domaine considéré :

$$i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \cong 6 \cdot 10^{-3}$$

Calculons d'après (6.13) et les données numériques précédentes, la fréquence à partir de laquelle la contribution du premier harmonique est de l'ordre de grandeur du fondamental ($\eta = 1$) :

$$K = 0,82$$

$$\varphi(\omega) \cong 6 \cdot 10^{-3} + 1,71 \omega \cdot 10^{-3}$$

$$\varphi(0,0) = 21$$

$$\varphi(100,252) = 7,5$$

quand l'oscillateur est en $\vec{r}_o = 0$ et le détecteur en $\vec{r} = 0$.

$$\eta = 1 \text{ pour } f = \underline{4,8 \text{ Hz}}$$

pour les positions $\vec{r}_o = 100$, $\vec{r} = 252$.

$$\eta = 1 \text{ pour } f = \underline{13,5 \text{ Hz}}$$

Il est intéressant de comparer ces résultats au cas d'une pile à eau lourde (EL.3) et à eau légère (Mélusine).

	G.1. (graphite)	EL.3 (eau lourde)	Mélusine (eau légère)
K	0,82	0,15	0,12
$\varphi(0,0)$	21	20	20
θ_{oo}	$1,71 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$	$1,80 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$	$7 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$
valeur de f pour $\eta = 1$.	4,8 Hz	26 Hz	100 Hz

Tableau 6.1.

Le tableau 6.1 met bien en évidence l'effet du volume et de la vie moyenne des neutrons dans la pile sur l'excitabilité des modes harmoniques par un absorbeur oscillant.

CHAPITRE VII

SOLUTION DIRECTE

DANS LE CAS DE LA PERTURBATION PÉRIODIQUE

Aux chapitres V et VI, nous avons donné la solution représentant la partie variable du flux provoquée par une perturbation périodique, sous la forme d'un développement dans les fonctions propres de l'opérateur statique. Cette représentation est avantageuse lorsque le développement peut être limité au terme fondamental. Dans ce cas le déphasage et le taux de modulation de la densité sont des grandeurs indépendantes de la position. Les conditions requises pour la validité de cette approximation ont été exposées au chapitre VI. Lorsque la contribution des harmoniques ne peut plus être négligée, cette représentation perd son avantage et il est préférable de revenir à une solution directe de l'équation (5.3) :

$$M_c \delta \phi = -\delta S - \delta M_c \phi \quad (7.1)$$

Le second membre représente une singularité, et la solution $\delta \phi$ devra être construite avec des solutions régulières et singulières, contrairement aux solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$M_c \delta \phi = \lambda \alpha \phi$$

qui doivent être régulières quand l'opérateur M_c ne comporte pas de singularités.

Pour résoudre l'équation (7.1) considérons comme au chapitre IV le vecteur V de composantes X et Y dans le coeur, Z_1 et Z_2 dans le réflecteur, solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{vmatrix} V &= \begin{vmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu^2 \end{vmatrix} V && \text{coeur} \\ \begin{vmatrix} \nabla^2 & 0 \\ 0 & \nabla^2 \end{vmatrix} V &= \begin{vmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{vmatrix} V && \text{réflecteur} \end{aligned}$$

ou μ^2 , ν^2 , k_1^2 , et k_2^2 sont des constantes, le vecteur V est nul à l'extérieur de la pile.

Cette équation du deuxième degré conduit à une solution régulière V_r et singulière V_s , la solution présentant une singularité dans le volume perturbé étant maintenant conservée.

On écrira ϕ sous la forme d'une combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$\phi = A_r V_r + A_s V_s$$

Cette solution doit satisfaire aux conditions aux limites (4.6). On détermine μ^2 , ν^2 , k_1^2 et k_2^2 et les matrices A_r et A_s en portant l'expression (7.3) dans l'équation (7.1).

A titre d'exemple, nous allons expliciter la solution pour un absorbeur d'amplitude oscillante dans une pile sphérique sans réflecteur.

Absorbeur d'amplitude oscillante dans une pile sphérique sans réflecteur. Considérons un absorbeur à neutrons thermiques d'amplitude oscillante, placé au centre d'une pile de rayon R ; le second membre de l'équation (7.1) s'écrit dans ce cas :

$$\delta M_c \phi = -S_a \phi_2(0) \delta(r)$$

$$\delta S = 0$$

Les solutions nulles pour $r = R$ de l'équation homogène (7.1) sont :

$$\varphi_\mu = \frac{A}{r} [e^{i\mu r} - e^{-i\mu(r-2R)}]$$

$$\varphi_\nu = \frac{B}{r} [e^{i\nu r} - e^{-i\nu(r-2R)}]$$

où A et B sont des constantes arbitraires ;
et μ^2 et ν^2 les racines de l'équation :

$$(1 + L_1^2 B^2 + i\omega\tau_1) (1 + L_2^2 B^2 + i\omega\tau_2) = k \left(1 - i\omega \Sigma \frac{\beta_1}{\lambda_1 + i\omega} \right) \quad (7.4)$$

La solution de l'équation (7.1) se présente sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions φ_μ et φ_ν :

$$\phi_1 = \varphi_\mu + \varphi_\nu$$

$$\phi_2 = m \varphi_\mu + n \varphi_\nu$$

portons ces solutions dans (7.1) et identifions les termes en facteurs de φ_μ et φ_ν , il vient :

$$m = \frac{p \Sigma_1}{\Sigma_2} \frac{1}{1 + L_2^2 \mu^2 + i\omega\tau_2}$$

$$n = \frac{p \Sigma_1}{\Sigma_2} \frac{1}{1 + L_2^2 \nu^2 + i\omega\tau_2}$$

le flux rapide est régulier partout, ce qui entraîne la condition :

$$r \phi_1 \rightarrow 0 \text{ avec } r$$

on en déduit :

$$\frac{B}{A} = - \frac{1 - e^{2i\mu R}}{1 - e^{2i\nu R}}$$

le flux thermique présente une singularité en $r = 0$, ce qui entraîne la conclusion :

$$4\pi r^2 D_2 \frac{d\phi_2}{dr} \rightarrow S_a \phi_2(0) \quad \text{pour } r \rightarrow 0$$

on en déduit :

$$B = \frac{S_a \phi_2(0)}{4\pi D_2} \frac{1}{m - n} \frac{1}{1 - e^{2i\nu R}}$$

finalement la solution de l'équation (7.1) s'écrit :

$$\phi_2 = \frac{S_a \phi_2(0)}{4\pi L_1^2 L_2^2 \Sigma_2} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left\{ \frac{1 + L_1^2 \mu^2 + i\omega\tau_1}{1 - e^{2i\mu R}} \frac{e^{i\mu R} - e^{-i\mu(r-2R)}}{r} - \frac{1 + L_1^2 \nu^2 + i\omega\tau_1}{1 - e^{2i\nu R}} \frac{e^{i\nu R} - e^{-i\nu(r-2R)}}{r} \right\} \quad (7.5)$$

Convergence du développement en fonctions propres. Nous allons établir l'identité du développement dans le système de base complet (4.4) et de la solution directe (7.5).

Dans le cas de la pile nue, les fonctions propres (4.12) doivent s'annuler à la surface du coeur, ce qui entraîne les relations :

$$AX + CY = 0$$

$$S_1 AX + S_2 CY = 0$$

comme $S_2 \neq S_1$, il faut que X ou Y soit nul, Y étant une fonction monotone croissante, il faut que $X = 0$,

On voit que dans le cas de la pile nue, les variables d'espace et d'énergie se séparent. A une même répartition spatiale caractérisée par la fonction X , correspondent deux fonctions propres distinctes, différenciant par leur répartition spectrale. Il est préférable de mettre en évidence ce caractère commun en utilisant la notation $j+$ et $j-$ où j représente les répartitions harmoniques d'espace et les indices $+$ et $-$ les répartitions spectrales correspondantes. Dans le cas d'une pile munie d'un réflecteur, cette séparation n'est pas possible, et l'indice est unique (4.12). Cette notation est analogue à celle utilisée en mécanique quantique pour les fonctions propres des particules à spin non nul. Pour une même répartition spatiale harmonique, les fonctions propres $+$ et $-$ ont pour expression

$$\phi_{\pm} = \begin{vmatrix} 1 \\ S_{\pm} \end{vmatrix} X(\mu)$$

avec :

$$S_{\pm} = \frac{p \Sigma_1}{k \Sigma_2} (1 + L_1^2 \mu^2 + \tau_1 \lambda_{\pm})$$

$\lambda_{\pm}$ étant les racines en λ de l'équation (4.10).

On a de même pour les fonctions adjointes :

$$\phi_{\pm}^+ = \begin{vmatrix} 1 \\ S_{\pm}^+ \end{vmatrix} X(\mu) \quad \text{avec :} \quad S_{\pm}^+ = \frac{k \Sigma_2}{p \Sigma_1} S_{\pm}$$

On constate que, pour une pile nue, les composantes rapide et thermique des flux réel et adjoint sont partout proportionnelles. Ce qui entraîne :

$$K_{ij} = B_j \delta_{ij} \quad (7.7)$$

Posons :

$$\theta_{j+} = \frac{p}{k \Sigma_2} \left(\frac{1}{v_1 S_{j+}} + \frac{S_{j+}^+}{v_2} \right) = \frac{\tau_1}{1 + L_1^2 \mu_j^2 + \tau_1 \lambda_{j+}} + \frac{\tau_2}{1 + L_2^2 \mu_j^2 + \tau_2 \lambda_{j+}}$$

$$B_{j-} = \frac{\int_c \phi_{j1+}^+ \phi_{j2} dV}{\int_c \phi_{j1+}^+ \phi_{j2+} dV} = \frac{S_{j-}}{S_{j+}} = \frac{1 + L_1^2 \mu_j^2 + \tau_1 \lambda_{j-}}{1 + L_1^2 \mu_j^2 + \tau_1 \lambda_{j+}}$$

$$\frac{\phi_{j2+}^+(r_0)}{\int_c \phi_{j1+}^+ \phi_{j2+} dV} = \frac{k \Sigma_2}{p \Sigma_1} X(\mu_j r_0)$$

$$\Lambda_{j+} = (\lambda_{j+} - i\omega) \theta_{j+} - i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}$$

avec ces notations, l'équation (5.10) s'écrit :

$$a_{j+} \Lambda_{j+} - a_{j-} \frac{S_{j-}}{S_{j+}} i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} = - \frac{S_a}{p \Sigma_2} \phi_2(r_0) X(\mu_j r_0) \quad (7.8)$$

et l'équation correspondante en a_{j-} est obtenue en permutant les indices $j+$ et $j-$.

$$a_{j-} \Lambda_{j-} - a_{j+} \frac{S_{j+}}{S_{j-}} i\omega \Sigma \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} = - \frac{S_a}{p \Sigma_2} \phi_2(r_0) X(\mu_j r_0) \quad (7.9)$$

les relations (7.8) et (7.9) permettent de calculer les coefficients $a_{j\pm}$ et on obtient le développement correspondant à la composante thermique du flux variable :

$$\delta \phi_2 = \sum_j (a_{j+} S_{j+} + a_{j-} S_{j-}) X(\mu_j r)$$

$$\delta \phi_2 = - \frac{p S_a}{k^2 \Sigma_2^2} \phi_2(r_o) \Sigma_j \frac{S_{j+} \Lambda_{j-} + S_{j-} \Lambda_{j+} + i\omega(S_{j-} + S_{j+})}{\Lambda_+ \Lambda_- + \omega^2 \Sigma_j^2} X(\mu_j r_o) X(\mu_j r)$$

S et Λ dépendant des racines en λ de l'équation (4.10) :

$$(1 + L_1^2 u^2 + \lambda \tau_1) (1 + L_2^2 u^2 + \lambda \tau_2) = k$$

on peut tout exprimer en fonction de μ^2 , et le développement précédent s'écrit :

$$\delta \phi_2 = \frac{S_a}{\Sigma_2} \phi_2(r_o) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 + L_1^2 \mu_j^2 + i\omega \tau_1}{(1 + L_1^2 \mu_j^2 + i\omega \tau_1) (1 + L_2^2 \mu_j^2 + i\omega \tau_2) - k(1 - i\omega \Sigma_j)} X(\mu_j r_o) X(\mu_j r)$$

dans cette expression, les fonctions propres régulières X normalisées (7.10), s'écrivent pour une pile sphérique nue :

$$X(\mu_j r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin \mu_j r}{r}$$

avec :

$$\mu_j = j \frac{\pi}{R}$$

Sommation de Poisson. Lorsque la série (7.10) comporte un grand nombre de termes significatifs, on peut la rendre plus convergente en utilisant la formule de Poisson. Cette méthode a été utilisée en particulier par Weinberg et Schweinler dans le rapport cité en référence au chapitre III.

Pour cela posons :

$$f(u) = \frac{1 + L_1^2 u^2 + i\omega \tau_1}{(1 + L_1^2 u^2 + i\omega \tau_1) (1 + L_2^2 u^2 + i\omega \tau_2) - k(1 - i\omega \Sigma_j)}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} f(u) [\cos u(r - r_o) - \cos u(r + r_o)]$$

l'expression (7.10) s'écrit :

$$\delta \phi_2 = \frac{S_a \phi_2(r_o)}{2\pi R r r_o \Sigma_2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\mu_j)$$

$\varphi(u)$ étant une expression paire, et nulle pour $u = 0$, on peut encore écrire cette série sous la forme :

$$\delta \phi_2 = \frac{S_a \phi_2(r_o)}{4\pi R r r_o \Sigma_2} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(\mu_j)$$

Sous cette forme, on peut utiliser la formule de sommation de Poisson, qui s'écrit :

$$S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(\mu_j) = \frac{R}{\pi} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i2\lambda R u} du$$

Pour évaluer cette intégrale, nous calculons les pôles de la fonction $\varphi(u)$. On remarque que ces pôles ne sont rien d'autre que les racines μ^2 et ν^2 de l'équation (7.4). L'intégrale peut donc se mettre sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i2\lambda R u} du = \frac{1}{4L_1^2 L_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + L_1^2 u^2 + i\omega \tau_1}{(u^2 - \mu^2)(u^2 - \nu^2)} \left[e^{i[2\lambda R + (r - r_o)]u} + e^{i[2\lambda R - (r - r_o)]u} \right] du$$

+ terme correspondant en $r + r_o$.

On doit évaluer les intégrales du type :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + L_1^2 u^2 + i\omega \tau_1}{u^2 - a^2} e^{i a u} du$$

Appelons a la racine située dans le demi-plan supérieur ; $-a$ est dans le demi-plan inférieur.
On a donc suivant le signe de α :

$$\alpha > 0 \quad I = \pi i \frac{e^{a a}}{a} (1 + L_1^2 a^2 + i \omega \tau_1)$$

$$\alpha < 0 \quad I = \pi i \frac{e^{-a a}}{a} (1 + L_1^2 a^2 + i \omega \tau_1)$$

que l'on peut écrire quel que soit le signe de α :

$$I = \pi i \frac{e^{|a|a}}{a} (1 + L_1^2 a^2 + i \omega \tau_1)$$

comme $0 < r - r_0 < R$, on a donc : pour $\lambda \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i 2 \lambda R u} du = \frac{\pi i}{2 L_1^2 L_2^2} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left[\frac{e^{2i|\lambda|R\mu}}{\mu} (1 + L_1^2 \mu^2 + i \omega \tau_1) \cos \mu (r - r_0) - \frac{e^{2i|\lambda|R\nu}}{\nu} (1 + L_1^2 \nu^2 + i \omega \tau_1) \cos \nu (r - r_0) \right]$$

+ termes correspondants en $r + r_0$.

et pour $\lambda = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{i 2 \lambda R u} du = \frac{\pi i}{2 L_1^2 L_2^2} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left[\frac{e^{i\mu|r-r_0|}}{\mu} (1 + L_1^2 \mu^2 + i \omega \tau_1) - \frac{e^{i\nu|r-r_0|}}{\nu} (1 + L_1^2 \nu^2 + i \omega \tau_1) \right]$$

+ termes correspondants en $r + r_0$.

On peut écrire en regroupant les termes :

$$S = \frac{2 \operatorname{Ri}}{L_1^2 L_2^2} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left[\frac{1 + L_1^2 \mu^2 + i \omega \tau_1}{\mu} e^{2i\lambda R \mu} \sin \mu r \sin \mu r_0 - \frac{1 + L_1^2 \nu^2 + i \omega \tau_1}{\nu} e^{2i\lambda R \nu} \sin \nu r \sin \nu r_0 \right. \\ \left. + \frac{R}{L_1^2 L_2^2} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} \left[\frac{1 + L_1^2 \mu^2 + i \omega \tau_1}{\mu} e^{i\mu r} \sin \mu r_0 - \frac{1 + L_1^2 \nu^2 + i \omega \tau_1}{\nu} e^{i\nu r} \sin \nu r_0 \right] \right]$$

On remarquera que la somme en λ est une série géométrique de raison $e^{2iR\mu}$ (1), on peut donc effectuer cette sommation, et il vient :

$$\sum_{\lambda=1}^N e^{2i\lambda R \mu} = e^{i 2 \mu R} \frac{1 - e^{i 2 \mu R N}}{1 - e^{i 2 \mu R}}$$

μ ayant été choisi comme la racine située dans le demi-plan supérieur, sa partie imaginaire est positive, il en résulte que :

$$e^{i 2 \mu R N} \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty$$

On a donc finalement :

$$\delta \phi_2 = \frac{S_a \phi(r_0)}{4\pi L_1^2 L_2^2 \Sigma_2} \left\{ \frac{1 + L_1^2 \mu^2 + i \omega \tau_1}{1 - e^{i 2 \mu R}} \frac{\sin \mu r_0}{\mu r_0} \frac{e^{i\mu r} - e^{-i\mu(r-2R)}}{r} - \frac{1 + L_1^2 \nu^2 + i \omega \tau_1}{1 - e^{i 2 \nu R}} \frac{\sin \nu r_0}{\nu r_0} \frac{e^{i\nu r} - e^{-i\nu(r-2R)}}{r} \right\} \quad (7.10)$$

expression identique à (7.5) lorsque l'absorbeur est au centre ($r_0 = 0$). On a donc démontré l'identité des deux méthodes mathématiques : la solution directe et le développement en fonctions propres.

(1) Cette remarque est due à C. Mercier, Ingénieur au Service de Physique Mathématique du C.E.N. Saclay.

Dans le cas d'une pile munie d'un réflecteur les coefficients K_{ij} ne sont plus de la forme (7.7) et on ne peut utiliser la méthode de sommation que nous venons de décrire.

Remarque. On aurait utilisé le système de base approché, défini par la matrice α_k au lieu du système de base complet α_r la sommation de la série ainsi obtenue aurait conduit à la relation suivante :

$$\delta\phi_2 = \frac{S_a \phi(r_o)}{4\pi L_1^2 L_2^2 \Sigma_2} \left\{ \frac{1 + L_1^2 \mu'^2}{1 - e^{2i\mu'R}} \frac{\sin \mu' r_o}{\mu' r_o} \frac{e^{i\mu' r_o} - e^{-i\mu'(r-2R)}}{r} - \frac{1 + L_1^2 \nu'^2}{1 - e^{2i\nu'R}} \frac{\sin \nu' r_o}{\nu' r_o} \frac{e^{i\nu' r_o} - e^{-i\nu'(r-2R)}}{r} \right\}$$

où μ'^2 et ν'^2 sont les racines de l'équation :

$$(1 + L_1^2 B^2 + i\omega \tau_1) (1 + L_2^2 B^2 + i\omega \tau_2) = k (1 - i\omega) \Sigma \frac{\beta_1}{\lambda_1 + i\omega} - \omega^2 \tau_1 \tau_2 \quad (7.11)$$

l'équation (7.11) ne diffère de (7.4) que par le terme $\omega^2 \tau_1 \tau_2$, pour évaluer le degré d'approximation ainsi obtenu, il faut comparer $\omega^2 \tau_1 \tau_2$ à $(k - 1)$. Prenons par exemple le cas d'une pile à eau lourde du type EL.2, on a :

$$\omega^2 \tau_1 \tau_2 \cong 210^{-6} f$$

$$(k - 1) \cong 0,15$$

On voit que l'écart ne devient appréciable que lorsque la fréquence dépasse quelques dizaines de cycles par seconde.

Validité du système de base approché. Les valeurs propres λ de l'équation (4.4) ont les dimensions d'une constante de temps. Ce sont effectivement les constantes de temps correspondant aux modes harmoniques pouvant prendre naissance dans une pile sans neutrons retardés. Chaque mode harmonique est caractérisé par la répartition spatiale des groupes de neutrons rapide et thermique. Nous avons vu que dans une pile nue ces groupes sont partout proportionnels, et pour une même répartition spatiale harmonique, le facteur de proportionnalité prend les deux valeurs suivantes :

$$S_{\pm} = \frac{p \Sigma_1}{k \Sigma_2} (1 + L_1^2 \mu^2 + \tau_1 \lambda_{\pm})$$

Dans le système approché, à cette même répartition spatiale harmonique correspond une valeur unique du facteur de proportionnalité :

$$S' = \frac{p \Sigma_1}{k \Sigma_2} (1 + L_1^2 \mu^2)$$

les facteurs S et S' diffèrent par les coefficients $\tau_1 \lambda_{\pm}$ où $\lambda_{\pm}$ sont les racines de l'équation :

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

avec :

$$a = \tau_1 \tau_2$$

$$b = \tau_1 (1 + L_2^2 \mu^2) + \tau_2 (1 + L_1^2 \mu^2)$$

$$c = (1 + L_1^2 \mu^2) (1 + L_2^2 \mu^2) - k$$

Dans une pile à neutrons thermiques on a $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$ on en déduit que $b^2 \gg 4ac$, et les racines peuvent s'écrire sous la forme approchée suivante :

$$\lambda_- \cong -\frac{c}{b} = -\frac{1 + L_2^2 \mu^2}{\tau_2}$$

$$\lambda_+ \cong -\frac{b}{a} + \frac{c}{b} = -\frac{1 + L_1^2 \mu^2}{\tau_1}$$

et la répartition caractérisée par le rapport S_+ des groupes thermique et rapide s'éteint beaucoup plus rapidement que la répartition S_- correspondante.

Le facteur de proportionnalité pour la répartition de longue période s'écrit :

$$S_- \cong \frac{p_{\Sigma_1}}{k_{\Sigma_2}} \left| 1 + (L_1^2 - \frac{\tau_1}{\tau_2} L_2^2) \mu^2 \right|$$

comme on a $\frac{\tau_1}{\tau_2} \ll 1$ on voit que S_- est très voisin de S' .

Les fonctions propres du système de base approché sont donc très voisines des fonctions propres les plus stables du système de base complet.

Il est aisé de voir qu'en modulation, la contribution la plus importante vient des fonctions les plus stables, ce qui justifie l'usage du système approché.

En effet considérons une pile dans laquelle nous pouvons exciter à l'aide d'une source oscillante des modes harmoniques caractérisés par leur constante de temps λ , l'amplitude correspondante du mode aura pour valeur :

$$\delta n = \frac{\delta S}{\lambda + i\omega}$$

elle est d'autant plus petite que λ est plus grand.

CHAPITRE VIII

DISPOSITIF DE MESURE

Le dispositif comprend trois parties :

- 1) la détection ;
- 2) l'intégration ;
- 3) la modulation ;

1) Détection. L'appareil de détection comprend un détecteur de neutrons thermiques suivi d'un amplificateur.

Si la densité des neutrons est suffisante, on utilise une chambre d'ionisation à courant, dans le cas contraire on utilise un compteur à impulsions.

a) Chambre d'ionisation à courant : elle est constituée par deux plateaux recouverts de carbure de bore ($B^{10}C$) enfermés dans une enceinte étanche remplie d'azote ou d'argon à la pression atmosphérique. Une différence de potentiel est maintenue entre les plateaux pour collecter les charges produites par l'ionisation du gaz. Le courant délivré par la chambre est habituellement de l'ordre de 10^{-8} A. à 10^{-6} A. Pour mesurer ce courant on utilise un amplificateur à courant continu et à contre réaction totale (schéma VIII. 1) type CEA N° A. C. C. 1 dont la lampe d'entrée est une lampe électromètre Victoreen. La bande passante de l'ensemble chambre ampli est limitée principalement par le temps de collection des ions formés dans la chambre. On peut diminuer ce retard en augmentant le champ électrique entre les plateaux.

Le dispositif suivant a été utilisé pour mesurer la bande passante (voir schéma VIII. 2). La chambre est enfermée dans une boîte de cadmium où l'on a ménagé une ouverture. On place l'ensemble dans un canal de pile. L'ouverture est obturée périodiquement par un volet de cadmium entraîné par un dispositif mécanique permettant de faire varier la vitesse de rotation. La chambre reçoit ainsi un flux de neutrons périodique. On mesure en fonction de la fréquence l'amplitude du fondamental du courant délivré par la chambre. Cette amplitude est représentée sur les courbes de la figure (VIII. 3). Chaque courbe est tracée pour une valeur du champ électrique entre les plateaux. Elles mettent bien en évidence l'accroissement de la bande passante avec le champ électrique. Avec un champ électrique de 1 000 V/cm, compatible avec les problèmes d'isolement, le fondamental ne subit pas d'altération jusqu'à une fréquence de 100 Hz. La bande passante dépend de la forme de la chambre et du gaz de remplissage et doit être mesurée de nouveau dès que l'on modifie ces caractéristiques.

b) Compteur-proportionnel : Dans le cas où la densité de neutrons est très faible, les impulsions dans la chambre sont espacées dans le temps et une mesure de courant nécessite une constante de temps d'intégration excessive. Il est alors préférable de mesurer le taux d'impulsions qui est également proportionnel à la densité. On utilise pour cela une chambre d'ionisation fonctionnant en collection électronique, la constante de temps dépend uniquement de l'amplificateur associé et permet des mesures à haute fréquence. Une amplification électronique donnant des impulsions élevées est avantageuse, celle-ci est obtenue directement dans la chambre, en utilisant une anode en forme de fil. La multiplication électronique a lieu au voisinage du fil où le gradient est élevé. Le compteur est suivi par un préamplificateur type A. B. V. et un ampli à large bande passante (2 MHz) type A. B. V.

2) Intégration. Le détecteur délivre un signal (courant ou taux d'impulsion) continu, auquel se superpose le signal périodique que l'on veut mesurer. Le principe de mesure de ce signal périodique est la détection synchrone. Le procédé technique dépend de la nature du signal.

a) Principe de la détection synchrone. La mesure du signal périodique se fait en redressant celui-ci. Le signal variable sortant du détecteur porte en plus de l'information cherchée qui est l'ampli-

tude, et la phase du fondamental par rapport au mouvement du modulateur, des harmoniques engendrés soit par le modulateur, soit par le milieu contenant les neutrons, et un bruit de fond dû aux fluctuations. Pour diminuer ces effets parasites, on peut utiliser un amplificateur résonnant. Comme le domaine des fréquences explorées s'étend à de très basses fréquences (0,1 Hz) un tel amplificateur est difficilement réalisable. On utilise alors un redresseur périodique synchronisé avec le modulateur (voir schéma VIII. 4). Ce redresseur réalise le contact entre le dispositif d'intégration et le détecteur pendant une demi alternance.

Pour utiliser les deux alternances on réalise un intégrateur symétrique. L'action du redresseur revient donc à multiplier le signal de sortie par une tension carrée périodique. Le signal ainsi multiplié est ensuite intégré dans le temps par l'intégrateur. Celui-ci donne l'intégrale pendant le temps de la mesure (vélocimétrie) ou une valeur moyenne (circuit RC).

Calculons la valeur de cette intégrale :

soit $i = \sin \omega t$ le courant de sortie de l'amplificateur, soit $E(\omega_0 t)$ la fonction représentant la durée du

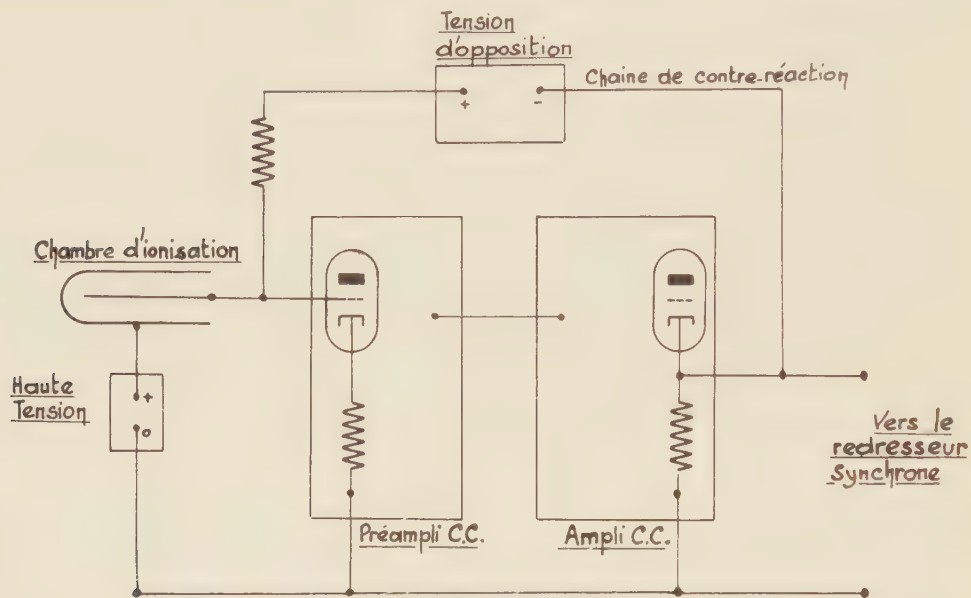


Fig. VIII. 1 - Chaîne d'amplification du courant délivré par la chambre d'ionisation. Le préampli et l'ampli sont à contre réaction totale,

La tension d'opposition, annule la composante continue du courant délivré par la chambre. Son rôle est d'éviter la saturation des étages de la chaîne d'amplification.

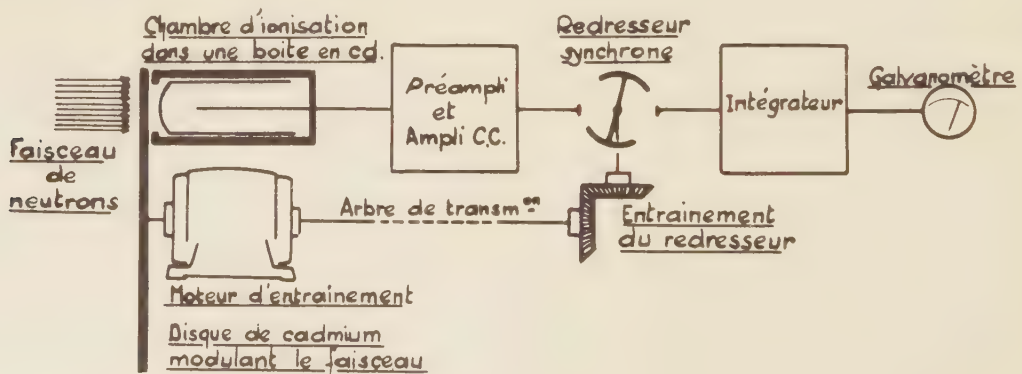


Fig. VIII. 2 - Dispositif pour la mesure de la bande passante de l'ensemble chambre d'ionisation - chaîne d'amplification.

contact entre l'ampli et l'intégrateur réalisé par le redresseur synchrone. C'est une fonction périodique qui a pour valeur :

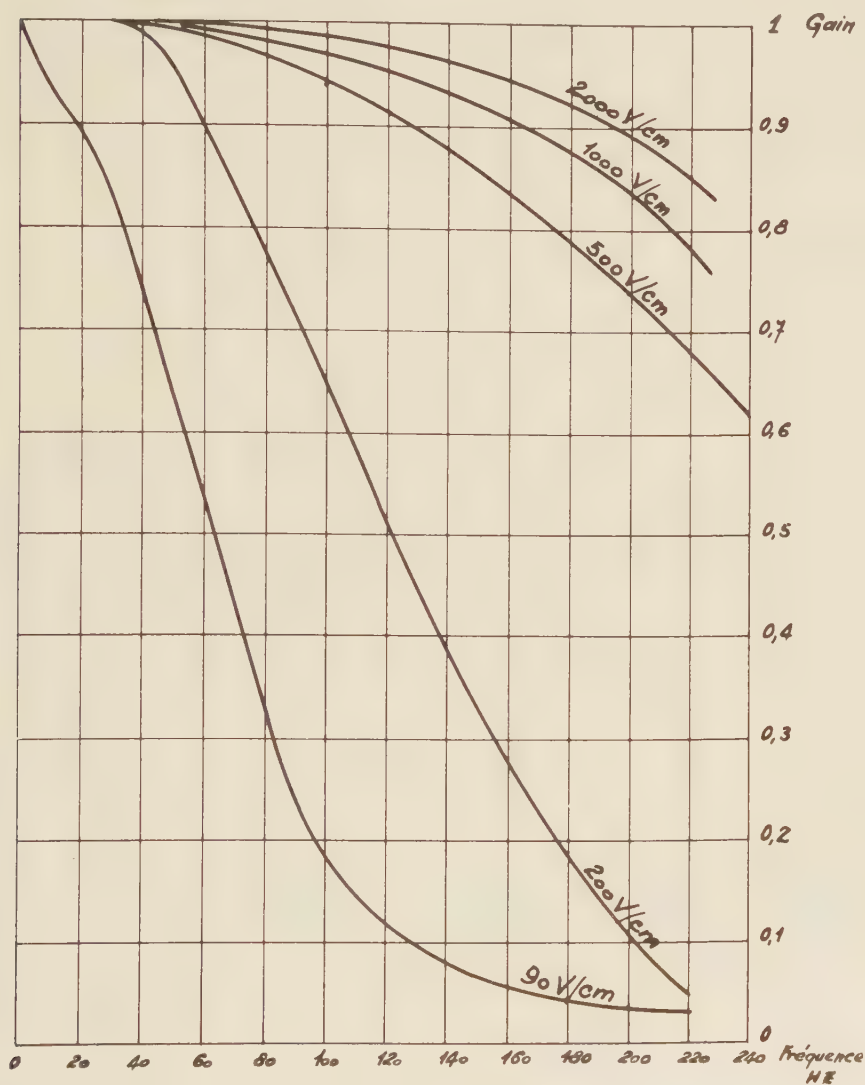
$$E(\omega_0 t) = 1 \text{ pour } t_1 + 2n \frac{T}{2} < t < t_1 + (2n+1) \frac{T}{2}$$

$$E(\omega_0 t) = -1 \text{ pour } t_1 + (2n+1) \frac{T}{2} < t < t_1 + (2n+2) \frac{T}{2}$$

où T est la période du modulateur ;
 t_1 le temps où débute la mesure.

Calculons la valeur de l'intégrale après une intégration de durée égale à n périodes :

$$I = \int_{t_1}^{t_1+nT} \sin \omega t E(\omega_0 t) dt$$



Plateaux recouverts de B^4C . Remplissage azote pression 1 kg/cm^2 .

Fig. VIII. 3 - Bande passante "Chambre et Ampli" en fonction du champ électrique entre plateaux.

On trouve :

$$I = \frac{1}{\omega} \Re \left(e^{\frac{i\omega T}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1 - e^{in\omega T}}{1 - e^{i\omega T}} e^{i\omega T_1}$$

où $\Re$ signifie que l'on prend la partie réelle de l'expression. Etudions la valeur moyenne de cette intégrale :

$$\bar{I} = \frac{I}{n T}$$

$$\bar{I} = \Re \left(e^{\frac{i\omega T}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1 - e^{in\omega T}}{1 - e^{i\omega T}} \frac{e^{i\omega T}}{n\omega T}$$

1) cas $\omega = \omega_0$: dans ces conditions :

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \cos \omega_0 t_1$$

2) cas $\omega = (2m + 1) \omega_0$:

$$\bar{I} = \frac{2}{(2m + 1)\pi} \cos (2m + 1) \omega_0 t_1$$

3) cas $\omega = 2m \omega_0$:

$$\bar{I} = 0$$

4) cas $\frac{\omega}{\omega_0} \neq$ entier

La valeur de $\bar{I}$ tend vers zéro comme $\frac{1}{n}$.

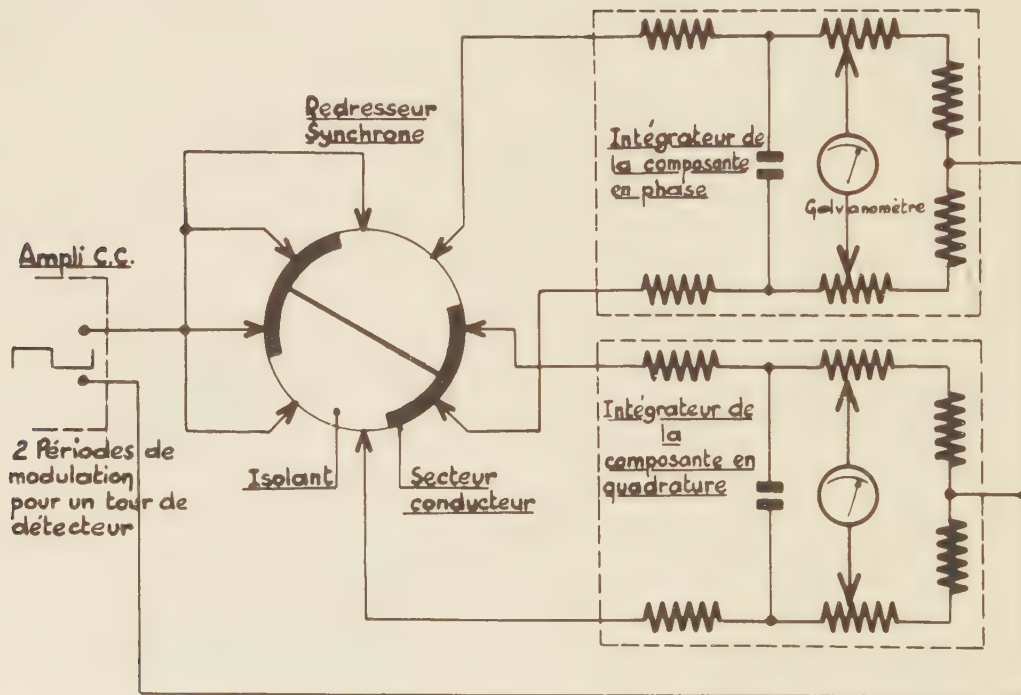


Fig. VIII. 4 - Principe du redresseur synchrone utilisant les deux alternances du signal, pour les composantes en phase et en quadrature.

Conclusion. On constate ainsi l'effet sélectif de la détection synchrone, les harmoniques pairs et en particulier le signal continu ne sont pas enregistrés, les harmoniques impairs sont enregistrés, mais leur amplitude est divisée par l'ordre de ces harmoniques (facteur $(2m + 1)^{-1}$) et les fréquences non multiples de celle du redresseur sont enregistrées avec une amplitude aussi faible que l'on veut, à condition d'intégrer pendant un temps suffisamment long.

La mesure du déphasage et de l'amplitude du signal se fait en modifiant la valeur de t_1 , on obtient alors, les composantes en phase et en quadrature :

$$\frac{2}{\pi} \cos \omega_0 t_1 \text{ et } \frac{2}{\pi} \sin \omega_0 t_1$$

ces deux mesures étant faites simultanément avec deux intégrateurs.

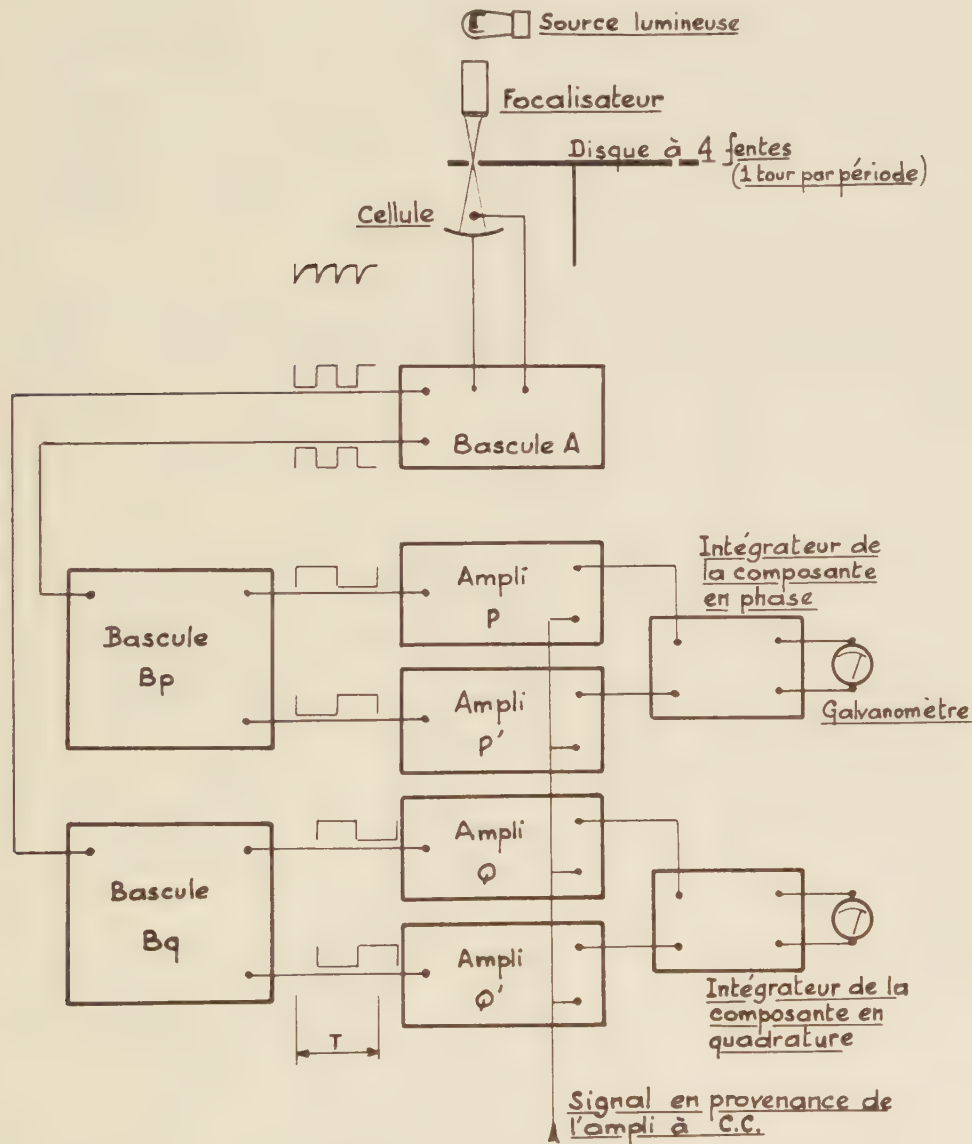


Fig. VIII. 5 - Redresseur synchrone de courant utilisant une commande optique et des amplis redresseurs sensibilisés P, P', Q, Q'.

Nous décrirons brièvement la réalisation du redresseur synchrone.

b) Redresseur synchrone pour courant. Le redresseur synchrone utilisé dans les premières expériences était constitué par un collecteur. Celui-ci était réalisé par un cylindre de bronze, fretté sur un cylindre de bakélite. Le cylindre était ensuite découpé à la fraise en quatre secteurs de 90° , de l'araldite était ensuite coulée et polymérisée dans les fentes réalisées par la fraise, l'ensemble était ensuite passé autour. Les contacts sont constitués par des balais en bronze de glucinium (chrysocal), il y a deux paires de balais décalées de 90° . Le collecteur donne ainsi simultanément les composantes en phase et en quadrature. Le collecteur est entraîné par l'arbre du modulateur qui réalise ainsi le synchronisme. Aux fréquences élevées, on observe des fluctuations du temps de contact dû au rebondissement des balais sur les fentes, et au décentrage. Ce phénomène limite l'emploi de ce dispositif à des fréquences inférieures à 25 Hz.

Dans les expériences ultérieures, le collecteur à balais a été remplacé par un dispositif dû à P. Le Baud permettant des mesures à haute fréquence (300 Hz) (voir schéma VIII. 5).

La synchronisation est réalisée à l'aide d'un disque percé de quatre fentes étroites (1/10 mm), entraîné par le moteur du modulateur. On projette sur les fentes l'image optique du filament d'une lampe.

Derrière le disque, une cellule photoélectrique reçoit donc quatre impulsions lumineuses par période. Les impulsions électriques de la cellule déclenchent une bascule A. La bascule A déclenche à son tour deux bascules B_p et B_q liées chacune à une anode différente de la bascule A. L'état des bascules B change donc deux fois par période, et le changement d'états de B_p et B_q est déphasé de $\frac{T}{4}$ dans le temps. Chacune de ces bascules alimente la voie en phase et la voie en quadrature.

Considérons la voie en phase. Les anodes de la bascule sont en opposition de phase entre elles. Chaque anode sensibilise un ampli redresseur (voir schéma VIII. 6), qui reçoit en outre le signal mesuré en provenance de l'ampli à courant continu. On redresse ainsi les deux alternances du signal. Le signal redressé est ensuite envoyé dans l'intégrateur. On a ainsi deux intégrateurs donnant respectivement les composantes en phase et en quadrature du signal.

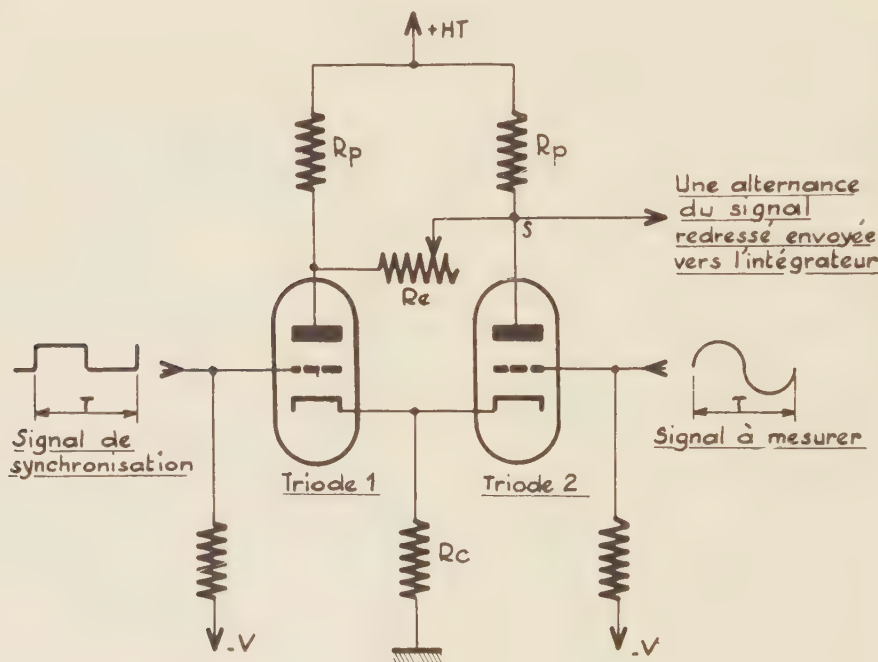


Fig. VIII. 6 - Ampli redresseur sensibilisé.

La résistance R_k est réglée de façon qu'il n'y ait pas de variation de potentiel en S en l'absence de signal. Dans ce cas la lampe 2 débite quand 1 est fermée. Si la lampe 1 est ouverte par le signal de synchronisation, le courant circulant dans la résistance de cathode commune R_c bloque la lampe 2. Cependant le potentiel de S ne varie pas si le courant circulant à travers R_c est égal au courant plaque de la lampe 2 ouverte. La lampe 2 conduit le signal quand elle est ouverte.

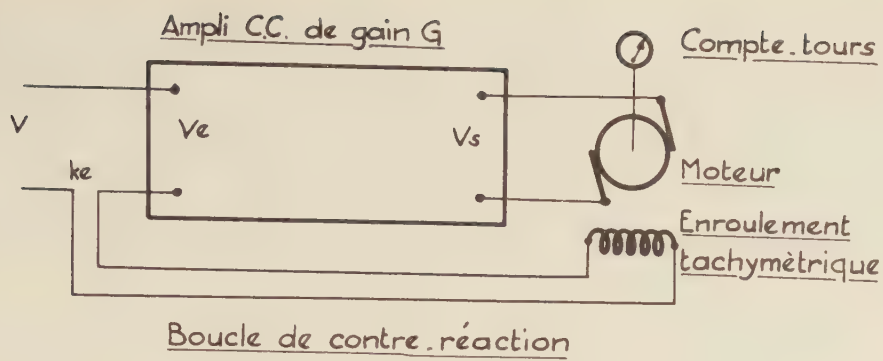


Fig. VIII. 7 - Vélodyne.

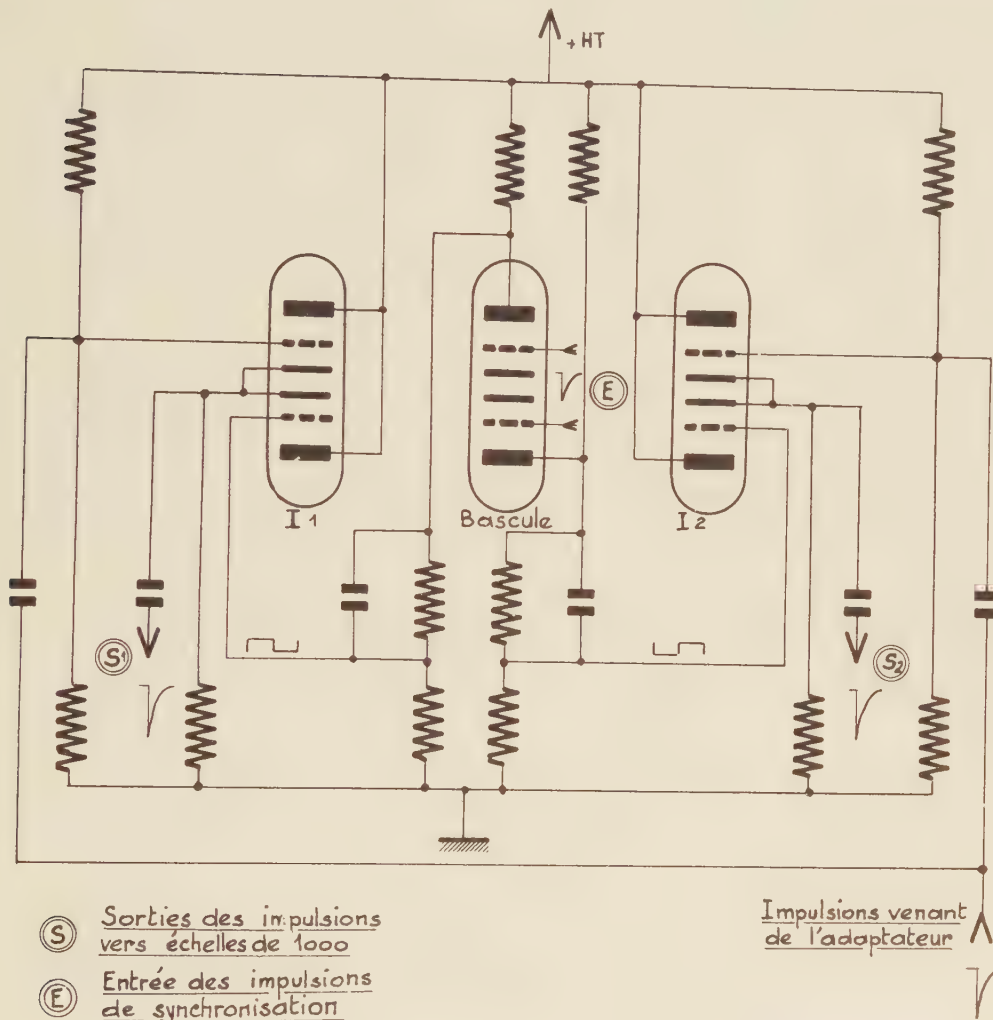


Fig. VIII. 8 - Détecteur synchrone d'impulsions par commutateur électronique.

c) Intégrateur de courant. L'intégrateur est constitué soit par un circuit R_c qui donne la valeur moyenne du signal, soit par un vélocyde [1] qui donne la valeur intégrée. Le vélocyde est un moteur à courant continu, possédant un enroulement tachymétrique. La force contre électromotrice est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur ; si la résistance du moteur était nulle, la vitesse serait rigoureusement proportionnelle à la différence de potentiel appliquée. Dans ce cas le nombre de tours du moteur est égal à l'intégrale dans le temps de la tension appliquée. On réalise une résistance pratiquement nulle en utilisant un amplificateur recevant la différence entre la tension à mesurer et la tension délivrée par l'enroulement tachymétrique. Le moteur est branché à la sortie de l'amplificateur (voir schéma VIII, 7). L'ensemble est appelé vélocyde. On peut montrer que ce dispositif réalise bien une vitesse de rotation proportionnelle à la tension à mesurer.

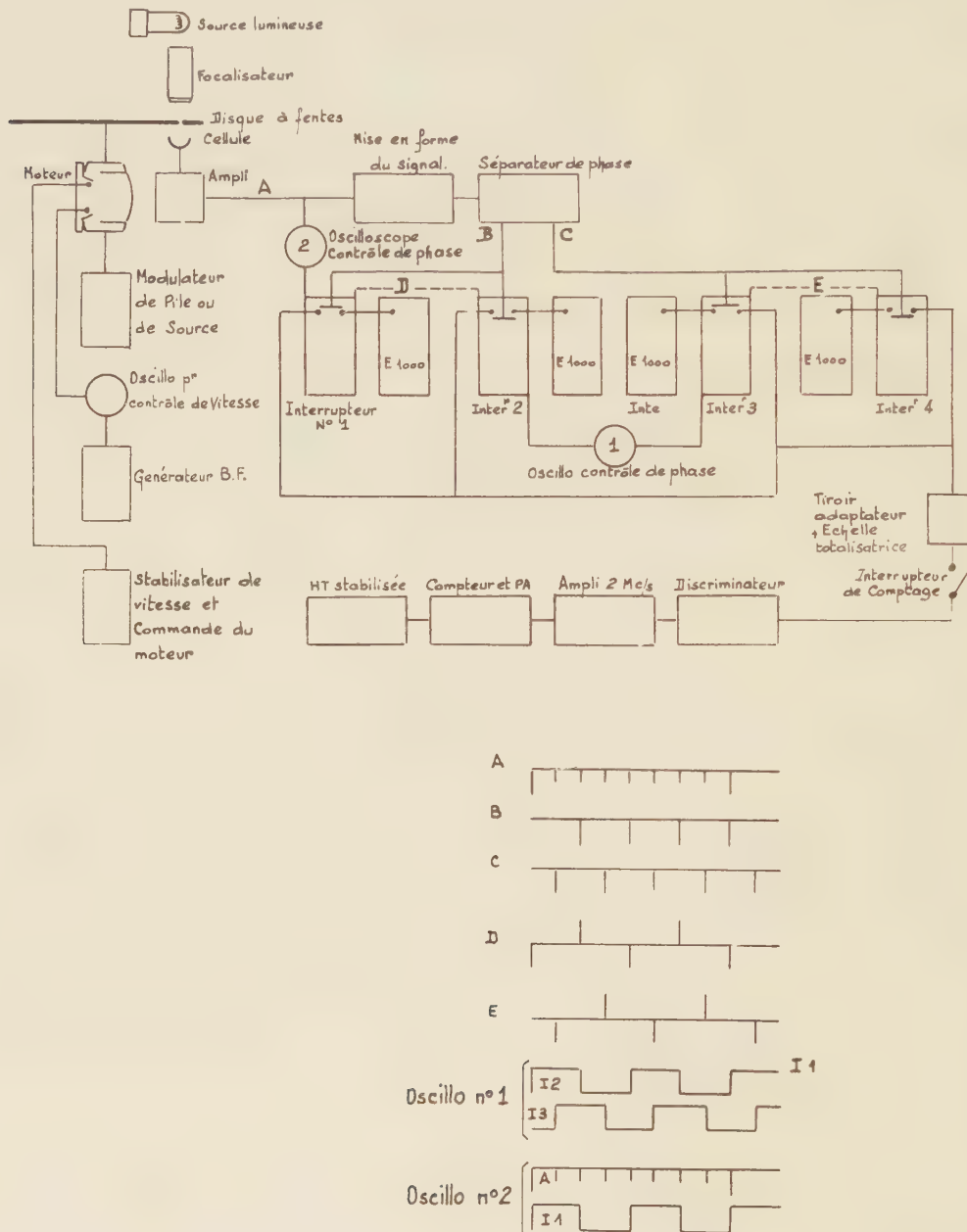


Fig. VIII.9 - Ensemble de détection synchrone des impulsions.

Soit :

V : cette tension ;

e : la force contre électromotrice ;

R : la résistance du moteur ;

i : le courant dans l'induit ;

ke : la différence de potentiel de l'enroulement tachymétrique ;

G : le gain de l'amplificateur.

la différence de potentiel aux bornes du moteur est égale à :

$$V_s = e + R_i$$

la différence de potentiel à l'entrée de l'amplificateur est égale à :

$$V_e = V - ke$$

On a de plus :

$$V_s = G V_e$$

éliminons V_s entre ces trois relations, il vient :

$$e = \frac{G}{1 + kG} V - \frac{R}{1 + kG} i$$

si $kG \gg 1$, cette relation devient :

$$e \approx \frac{1}{k} V$$

la force contre électromotrice est donc bien proportionnelle à la différence de potentiel à mesurer.

d) Détection synchrone du taux d'impulsions [2]. Le système est analogue à celui utilisé pour la détection du courant.

Les impulsions du compteur sont envoyées dans un amplificateur à large bande passante (2 MC) puis mises en forme par le discriminateur qui coupe également les impulsions de hauteur inférieure à un seuil réglable, et impose un temps mort. Ces impulsions sont envoyées dans l'ampli redresseur (voir schéma VIII. 8).

L'ampli redresseur est sensibilisé par une bascule dont les états changent périodiquement en synchronisme avec le modulateur. La synchronisation est assurée par un dispositif optique comprenant un filament, un condenseur optique, une cellule photoélectrique et un disque à quatre fentes entraîné par le moteur du modulateur. L'ampli redresseur laisse passer les impulsions du compteur pendant une demi alternance sur une échelle et pendant l'autre sur une seconde échelle.

Un deuxième ampli redresseur et un groupe de deux échelles sont commutés avec un retard de $\frac{T}{4}$ par rapport au premier (voir schéma VIII. 9). Si N_p et N'_p , N_q et N'_q sont les taux d'impulsions enregistrées par les quatre échelles, les taux de modulation en phase et en quadrature du taux de comptage sont égaux à :

$$m_p = \frac{N_p - N'_p}{N_p + N'_p} \quad m_q = \frac{N_q - N'_q}{N_q + N'_q}$$

on vérifie que l'ensemble fonctionne correctement si :

$$N_p + N'_p = N_q + N'_q$$

Modulation. L'entraînement du dispositif de modulation est réalisé par un moteur à courant continu d'une puissance de 1 CV alimenté par un amplificateur à thyatron. Le moteur entraîne une dynamotachymétrique. Une boucle de contre réaction permet de maintenir la vitesse à une valeur constante à 0,5 pour cent, quelles que soient les variations de charge sur le moteur ou de tension d'alimentation. La vitesse est réglable dans un rapport de 1 à 10. Des boîtes de vitesse permettent d'obtenir sur l'arbre d'entraînement du dispositif de modulation des rapports de vitesse beaucoup plus grands (voir schéma VIII. 10).

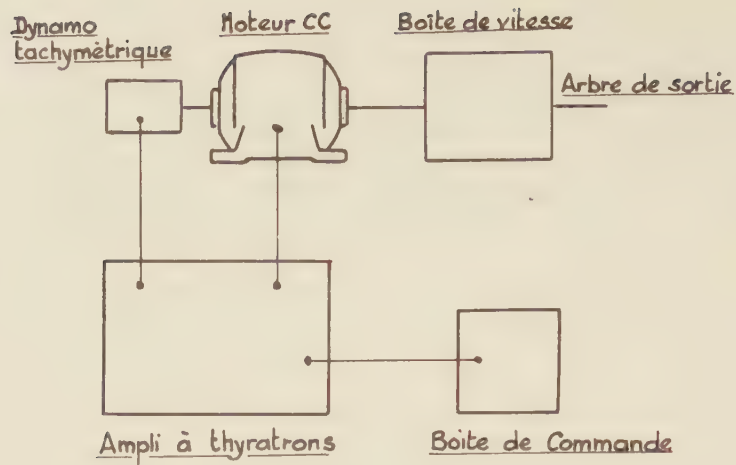


Fig. VIII. 10 - Ensemble d'entrainement du modulateur.

Le dispositif de modulation est particulier à chaque catégorie d'expérience et sera décrit en même temps que celles-ci.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE VIII.

- [1] POTTIER J. - Onde électrique n° 343 Octobre 1955.
- [2] LE BAUD P. - Onde électrique n° 343 Octobre 1955.

CHAPITRE IX

CONTROLE DE LA PURETÉ NUCLÉAIRE DES MATÉRIAUX

On exige des matériaux de structure des piles une pureté nucléaire considérable, toute absorption parasite se traduisant par une augmentation de la masse critique et de la puissance. Cette exigence est particulièrement sévère pour le modérateur qui constitue la masse principale du coeur de la pile. Il est donc nécessaire de contrôler sa pureté. Dans ce but, une méthode dite "méthode d'oscillation", due à E. P. Wigner [1], a été mise au point, utilisant une pile comme instrument de mesure.

Dans une pile en équilibre, la production des neutrons compense à chaque instant leur disparition par capture et par fuite. Si on détruit cet équilibre, par exemple en introduisant un absorbeur, la densité des neutrons décroît, la vitesse de décroissance étant sensiblement proportionnelle à l'importance de l'absorption. On peut observer avec une chambre à bore cette décroissance dès qu'elle excède les fluctuations statistiques de la densité. La sensibilité de la mesure est limitée par l'instabilité propre à la pile. En effet, plusieurs phénomènes difficilement contrôlables concourent à cette instabilité : ce sont les variations de la température, de la pression atmosphérique et de la géométrie. Si l'absorbeur introduit est très faible un de ces phénomènes peut provoquer une dérive de la densité pendant le temps nécessaire au signal pour sortir des fluctuations statistiques, masquant ainsi l'effet à mesurer.

Afin de diminuer cet effet et augmenter par conséquent la sensibilité, il est préférable de faire osciller l'absorbeur, la pile étant maintenue critique en moyenne à l'aide des plaques de réglage. La

densité des neutrons oscille en synchronisme et un analyseur harmonique mesure la composante fondamentale de cette oscillation. On diminue par ce procédé, d'une part l'effet de dérive, d'autre part l'effet des fluctuations statistiques.

Dispositif expérimental. Nous allons décrire le dispositif d'oscillation utilisé actuellement à la pile de Fontenay-aux-Roses pour le contrôle de la pureté du graphite [2], [3], [4].

Celui-ci est mis sous forme d'une brique (99 x 95 x 190 mm) pesant environ 3 kg. La brique oscille dans un canal tangentiel situé dans le réflecteur de la pile. L'entraînement est assuré par le dispositif décrit au chapitre VIII (voir schéma VIII, 10). La fixation des briques au câble d'entraînement doit permettre un changement fréquent. Dans ce but, un trou percé à chaque extrémité de la brique reçoit un tube d'aluminium de même diamètre relié au câble d'entraînement. Une fente est ménagée pour le passage du

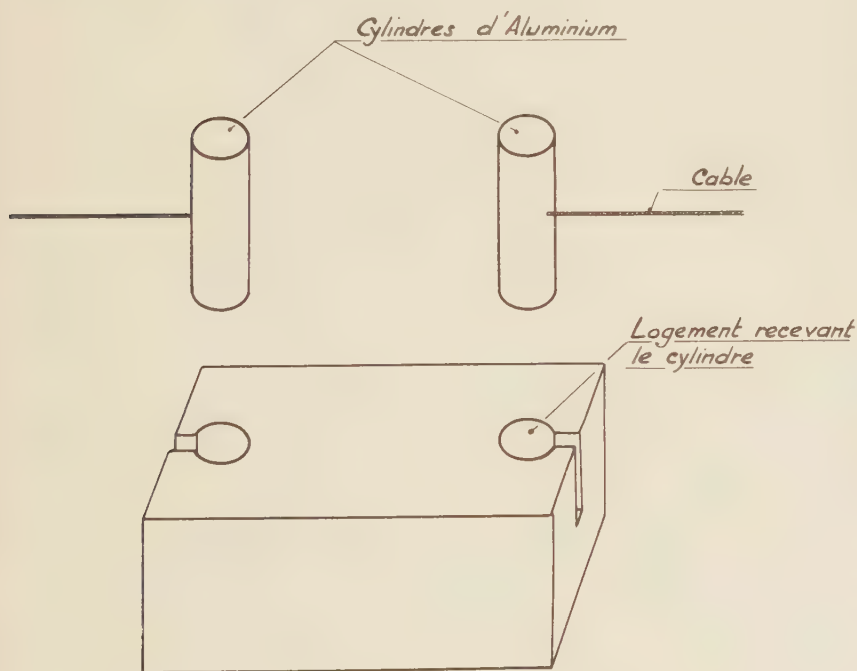


Fig. IX. 1 - Fixation des briques de graphite pour le contrôle de la pureté.

cable (voir schéma IX), l'absorption des cylindres d'aluminium est égale à celle de la portion de câble manquante afin de ne donner aucun signal parasite pendant l'oscillation. L'oscillation de la densité des neutrons est mesurée par une chambre d'ionisation à carbure de bore, et l'ensemble de détection synchrone comprenant le vélodyne décrit au chapitre VIII (voir schéma d'ensemble IX. 2).

Cette méthode permet de comparer l'absorption de briques de graphite à celle d'une brique de référence. Le dispositif est préalablement étalonné, en introduisant des quantités connues d'absorbeur dans la brique de référence.

Théorie de la méthode. La théorie a été établie au chapitre VI. La pile est utilisée ici comme instrument de comparaison, aussi un calcul exact de l'oscillation de la densité due à la perturbation périodique n'est pas nécessaire. Par contre la méthode de Fontenay-aux-Roses différant dans son application de celles utilisées ailleurs [5], [6], [7], nous nous étendrons sur l'aspect physique de la perturbation.

On peut attribuer à deux effets l'oscillation de densité due au déplacement périodique d'un corps diffusant ou absorbant dans une pile.

Il y a d'une part un effet local, dû à la déformation de la densité des neutrons au voisinage immédiat de la perturbation (1), la portée de cette déformation est de l'ordre de grandeur de la longueur de diffusion des neutrons dans le milieu. Cette déformation se déplace avec le corps perturbateur, et en phase avec lui si la période d'oscillation est grande devant la vie moyenne des neutrons dans ce milieu. Il en résulte qu'un détecteur placé au voisinage du corps perturbateur enregistre un signal périodique, en général très riche en composantes harmoniques (dans le temps), mais celles-ci sont supprimées par l'analyseur harmonique. On peut représenter dans un diagramme vectoriel l'amplitude et la phase du signal local. L'origine des phases étant par exemple le passage de l'oscillateur par sa position médiane. Si le corps est à la fois diffusant et capturant, le signal résultant est la somme des signaux de diffusion et de capture.

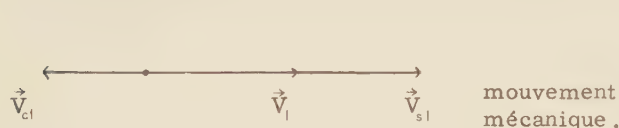


diagramme du signal local (1)

Pour fixer les idées, nous appellerons $\vec{V}_{sl}$, $\vec{V}_{cl}$ et $\vec{V}_l$ les vecteurs représentant respectivement les signaux locaux de diffusion, de capture et la somme de ces signaux (voir diagramme (1)).

D'autre part la perturbation affecte la réactivité de la pile, provoquant ainsi une variation

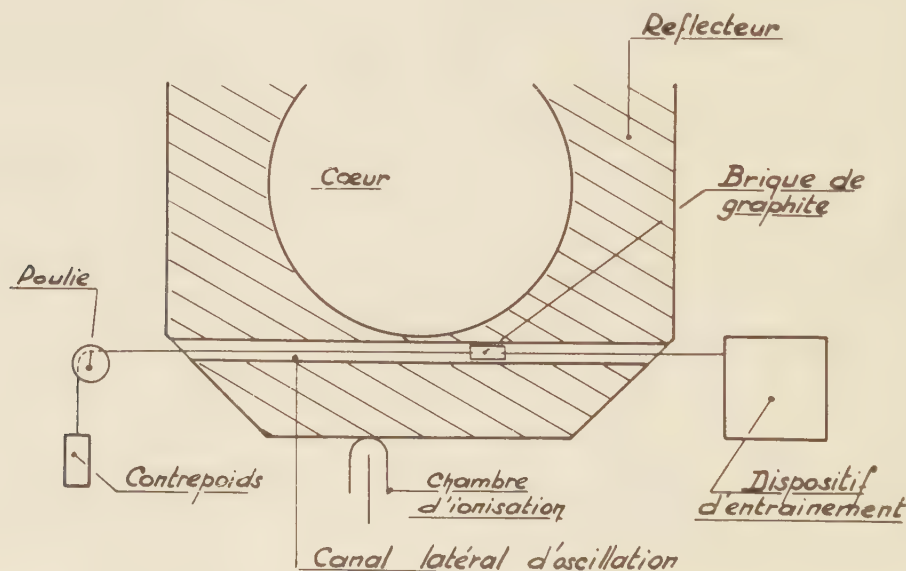


Fig. IX. 2 - Schéma d'ensemble du dispositif pour le contrôle de la pureté du graphite.

(1) Cette dépression est représentée par la somme des harmoniques $(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \phi_j)$ du développement établi au chapitre VI.

périodique de la densité (1). Dans le cas où la période est faible devant la vie moyenne des neutrons dans la pile, les modes harmoniques (dans l'espace) de la distribution des neutrons contribuent d'une façon négligeable à l'oscillation de la densité, et celle-ci varie dans son ensemble suivant le mode fondamental. Cette oscillation peut être détectée en tous points de la pile. L'amplitude et le déphasage de cette oscillation par rapport au mouvement de l'oscillateur est donnée par la relation (6.9) du chapitre VI où l'on considère comme négligeable la contribution des harmoniques d'espace. Nous retiendrons de cette relation que le signal est déphasé par rapport au mouvement mécanique, le déphasage ne dépendant que de la fréquence et des neutrons retardés. Comme précédemment le signal sera la somme des signaux de capture et de diffusion.

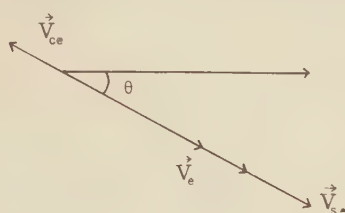


diagramme (2)

petites variations. Nous avons représenté cette somme sur le diagramme (3) où $\vec{V}_s$, $\vec{V}_c$, $\vec{V}_r$ représentent respectivement les signaux résultants de diffusion, de capture et leur somme. On a donc :

$$\vec{V}_{s,r} = \vec{V}_{s,l} + \vec{V}_{s,e}$$

$$\vec{V}_{c,r} = \vec{V}_{c,l} + \vec{V}_{c,e}$$

$$\vec{V}_r = \vec{V}_l + \vec{V}_e$$

mouvement
mécanique.

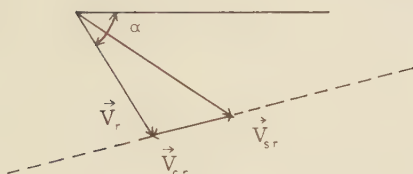


diagramme (3)

Dans la méthode d'oscillation de Fontenay-aux-Roses on utilise la combinaison de ces deux signaux, et on mesure le déphasage α . Dans les autres méthodes d'oscillation on n'utilise qu'un signal et on mesure l'amplitude.

Avantage de la méthode d'oscillation de Fontenay-aux-Roses. Des phénomènes parasites affectent l'amplitude sans modifier le déphasage. C'est en particulier le cas de la puissance de la pile et de la densité du graphite, dans ces deux derniers cas, le diagramme 3 subit une homothétie qui laisse invariant le déphasage α du signal.

L'effet de la puissance sur l'amplitude du signal peut être aisément supprimé par un dispositif électronique simple. Par contre, l'effet de densité nécessite de faire osciller dans le canal un train continu de graphite contenant la brique à mesurer. La masse de graphite ainsi en mouvement est vingt fois supérieure à celle de la brique, objet de la mesure. Le dispositif d'entraînement est donc considérablement simplifié dans la méthode de Fontenay-aux-Roses.

La puissance étant sujette à des fluctuations statistiques, il semble que les fluctuations de la phase doivent être plus faibles que celles de l'amplitude et permettre ainsi des mesures plus précises. Cependant ce point n'a pas été prouvé de façon certaine.

(1) Cette variation périodique est donnée par le fondamental du développement établi au chapitre VI.

Sensibilité de la mesure. Dans le dispositif actuel, le déphasage α varie de 5° par mg de bore ajouté dans la brique de référence. La variance de la phase du signal enregistrée pendant la durée d'une mesure est de 1° .

La sensibilité permet donc de déceler une quantité de bore de 0,2 mg dans 3 kg de graphite. Soit 0,07 ppm (parties par million).

On a vérifié expérimentalement que le déphasage était indépendant de la densité du graphite en faisant varier celle-ci entre 1,424 et 1,654.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE IX.

- [1] WIGNER E. P. - Brevet n° 2.781.387 déposé le 4.3.1947, déclassé E.U. 12.12.57.
- [2] RAIEVSKI V., YVON J. - C.R. Acad. Sc. 231, 345-347 (1950)
- [3] ERTAUD A., RAIEVSKI V., BRETON D. - J. Phys. et le Radium 12, 784-788 (1951)
- [4] BRETON D. - Conf. Genève 1955 Vol. IV rapport P/356.
- [5] HOOVER J. et Al. - Phys. Rev. 74, 8, 864-870 (1948)
- [6] LANGSDORF A. - Phys. Rev., 74, 1216-1217 (1948)
- [7] LITTLER D. J. - Atomics, 1, 7, 189-195 (1950)

CHAPITRE X

DÉTERMINATION DE LA VIE MOYENNE ET MESURE DE LA RÉACTIVITÉ DANS UNE PILE

Une réaction en chaîne peut être schématisée par un cycle représentant une suite d'évènements aléatoires et leurs probabilités associées à travers lesquelles cette réaction en chaîne s'entretient. Ce cycle est caractérisé par deux paramètres importants, sa durée (ou vie moyenne) et son facteur de multiplication. Ces paramètres sont des moyennes prises sur un très grand nombre de cycles.

Dans le cas des piles, ces évènements aléatoires sont les sources, la capture, la fission, l'émission de neutrons secondaires à la suite de la fission et les fuites. Le réflecteur agit sur les deux paramètres du cycle des neutrons dans la pile.

La vie moyenne est allongée par rapport à la valeur qu'elle aurait dans la pile nue. L'allongement est provoqué d'une part par la diminution de la probabilité des fuites, d'autre part par le passage du neutron dans une région de capture plus faible que le coeur.

Le facteur de multiplication effectif est amélioré, en raison d'une part de la diminution de la probabilité de fuite, d'autre part du passage du neutron dans une région dépourvue de capture résonnante (facteur antitrappe égal à l'unité).

Le calcul de la vie moyenne des neutrons a été fait au chapitre V (relation 5.12).

Le facteur de multiplication, k , pour un coeur de dimensions infinies a été donné au chapitre IV. Dans une pile finie, une partie des neutrons est perdue par fuite. Soit p_r et p_t ces probabilités de fuites pendant les phases de ralentissement et thermique. Le facteur de multiplication effectif du cycle a pour valeur :

$$k_e = \frac{k}{(1 + p_r)(1 + p_t)} \quad (10.1)$$

Ce facteur est égal à l'unité pour une pile critique, la réaction en chaîne s'entretenant d'elle-même en l'absence de sources.

L'expression des probabilités p_r et p_t s'obtient aisément à partir des relations (4.3) et (4.4).

Faisons $S = 0$ dans ces relations et cherchons la solution sous forme d'une combinaison linéaire des solutions de l'équation :

$$(\nabla^2 + B^2) \phi = 0 \quad (10.2)$$

En portant cette expression dans les relations (4.3), on obtient l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{k}{(1 + L_{1c}^2 B^2)(1 + L_{2c}^2 B^2)} = 1 \quad (10.3)$$

En comparant (10.3) et (10.1), on voit que l'on peut identifier $L_{1c}^2 B^2$ et $L_{2c}^2 B^2$ aux probabilités de fuites.

La valeur de B^2 que l'on appelle le laplacien de la pile est liée aux valeurs propres de l'équation (4.4), elle est indépendante du facteur de multiplication k de la pile.

On appelle réactivité la variation relative du facteur de multiplication :

$$\rho = \frac{\delta k}{k} \quad (10.4)$$

Puisque les probabilités de fuites sont indépendantes de k , on voit d'après (10.1) que l'on peut écrire :

$$\rho = \frac{k_e - 1}{k_e}$$

Le facteur de multiplication effectif peut être modifié en perturbant les probabilités des événements aléatoires du cycle des neutrons. Cette perturbation peut être compensée par une variation homogène correspondante du facteur de multiplication. En particulier dans le cas de la perturbation locale de la probabilité d'absorption, la compensation est obtenue en modifiant k d'une valeur donnée par la relation (6.2). Cette relation jointe à (10.4) permet alors de définir pour une pile donnée la réactivité équivalente à un absorbeur :

$$\rho = \frac{\rho}{k} \frac{S_a}{\bar{z}_{2c}} \frac{\phi_{02}^+ (\vec{r}_0) \phi_2 (\vec{r}_0)}{\iiint_{\text{cœur}} \phi_{01}^+ \phi_{02} dV} \quad (10.5)$$

Le rôle des neutrons retardés dans la modulation. On peut mesurer la réactivité en faisant osciller l'absorbeur et en observant le taux de modulation du fondamental de la distribution des neutrons. La relation (5.14) montre que ce taux de modulation, pour une fréquence donnée, ne dépend que des caractéristiques des neutrons retardés et de la vie moyenne des neutrons. En modifiant la fréquence d'oscillation, on peut déterminer à la fois la réactivité et la vie moyenne, connaissant les caractéristiques des neutrons retardés. Si la mesure est effectuée à une fréquence suffisamment élevée, seule la fraction β des neutrons retardés intervient dans ces mesures.

La précaution à observer dans cette méthode est de s'assurer qu'on mesure bien le taux de modulation du fondamental, pour cela il faut vérifier que la contribution des harmoniques est négligeable à toute fréquence, ou connue de façon à effectuer les corrections nécessaires. Ces conditions ont été exposées au chapitre VI.

On doit attirer l'attention sur le rôle essentiel des neutrons retardés dans cette méthode. On pourrait déterminer la réactivité équivalente à un absorbeur si on possédait un étalon de réactivité, la méthode d'oscillation permettant de comparer la réactivité à mesurer à l'étalon. Un étalon de réactivité est extrêmement difficile à établir. Dans la méthode d'oscillation, le rôle de l'étalon de réactivité est joué par les neutrons retardés. En effet, la modulation à fréquence élevée laisse en moyenne inchangée la concentration des émetteurs, seule la fraction $(1 - \beta)$ des neutrons immédiats est affectée par la modulation. L'oscillation est alors équivalente à une diminution de réactivité égale à β .

La réactivité et la vie moyenne sont ainsi mesurées en fonction de β , d'où l'intérêt de connaître ce facteur avec précision.

Dans une pile à neutrons thermiques, on peut considérer trois catégories de neutrons retardés.

a) neutrons retardés de fission thermique : ce sont les plus abondants, les caractéristiques les plus précises ont été mesurées par Keepin et Wimett [1] et sont reproduites dans le tableau ci-dessous :

$10^5 \beta_i$	$\lambda_i^{-1} \text{ sec}$
24	78,7
139	31,5
122	8,7
265	3,2
83	0,72
17	0,26

$$10^5 \beta = 650 \pm 30$$

Tableau - Neutrons retardés de la fission thermique de ^{235}U .

b) neutrons retardés de fission rapide : les neutrons de fission d'énergie supérieure au seuil de la fission de l'uranium-238, peuvent provoquer la fission de ce noyau. Les neutrons retardés sont plus

abondants que dans le cas de ^{235}U , et doivent être pris en considération. Les caractéristiques de ces neutrons ont été mesurées par Keepin et Wimett [1] et sont reproduits dans le tableau ci-dessous. La fraction de ces neutrons produits pour chaque fission thermique dépend du facteur de fission rapide ϵ . Elle est indiquée dans le tableau ci-dessous pour la pile ZOE ($\epsilon = 0,038$), d'après une méthode de calcul décrite dans la note CEA n° 161 [2].

$10^5 \beta_i$	$10^5 \delta \beta_i$ pour la pile Zoé	λ_i^{-1} s
20	0	75,8
214	6	31,1
254	13	7,2
610	35	2,8
354	21	0,71
118	9	0,25

$$10^5 \beta = 1570 \quad 10^5 \delta \beta = 84$$

Tableau - neutrons retardés de la fission rapide de ^{238}U et contribution de ces neutrons pour une fission thermique dans la pile Zoé.

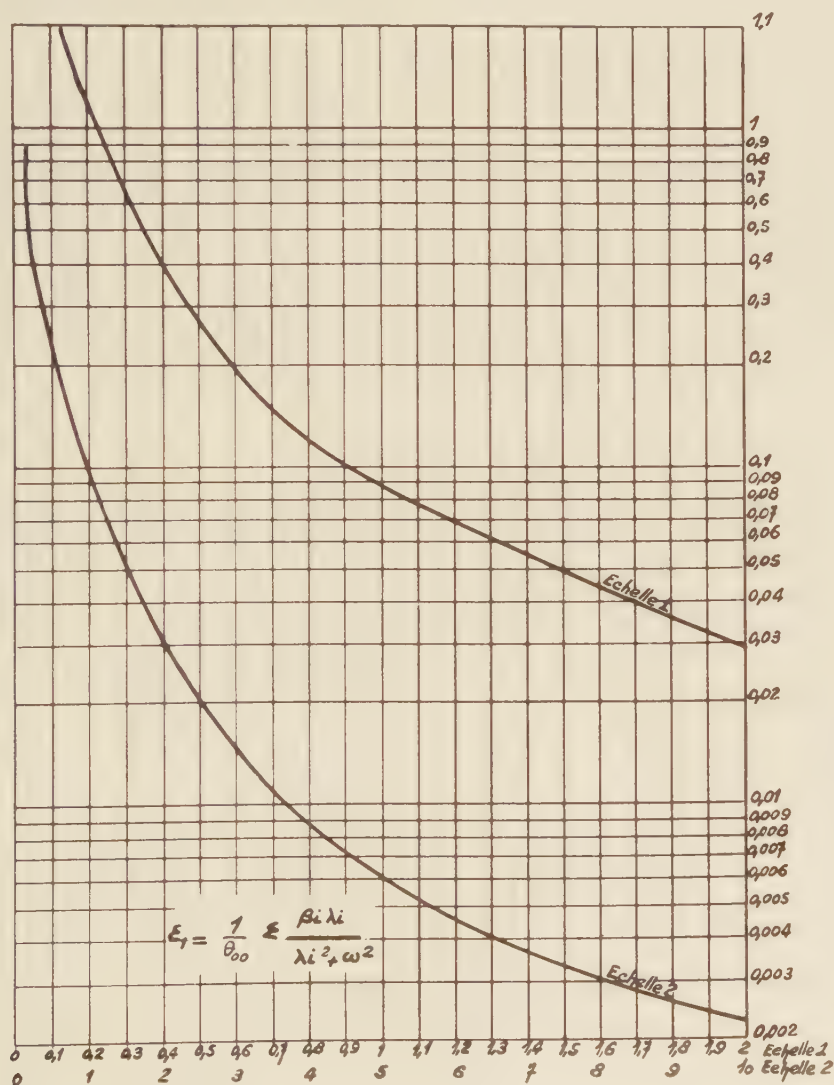


Fig. X.1 - Terme correctif dépendant des neutrons retardés. (Pile ZOE).

c) neutrons retardés de photodésintégration : les photons émis par les produits de fission, peuvent provoquer la photodésintégration de certains noyaux avec émission d'un neutron. Ce phénomène est important dans les piles modérées au deutérium ou au béryllium, le seuil de photodésintégration pour ces noyaux étant particulièrement bas. La fraction des neutrons retardés produits dans l'eau lourde par ce processus a été mesurée par Bernstein et al [3], ainsi que les périodes correspondantes. Le dispositif expérimental comprenant une cuve d'eau lourde et un petit bloc d'uranium-235 préalablement irradié dans une pile à neutrons thermiques. L'importance de ces neutrons était comparée à celle des neutrons différés de la fission thermique de ^{235}U ayant une vie moyenne de 31,5 s. Nous avons pris la valeur de Keepin et Wimett ($10^5 \beta_i = 139$). Pour évaluer l'importance de ces neutrons dans une pile, il faut tenir compte du facteur d'affaiblissement des photons, dû à l'absorption dans les barres d'uranium et aux fuites. Ce facteur a été calculé dans le cas de la pile Zoé par Lipkin [4], qui a trouvé une valeur 0,25. Ces valeurs sont reproduites dans le tableau ci-après :

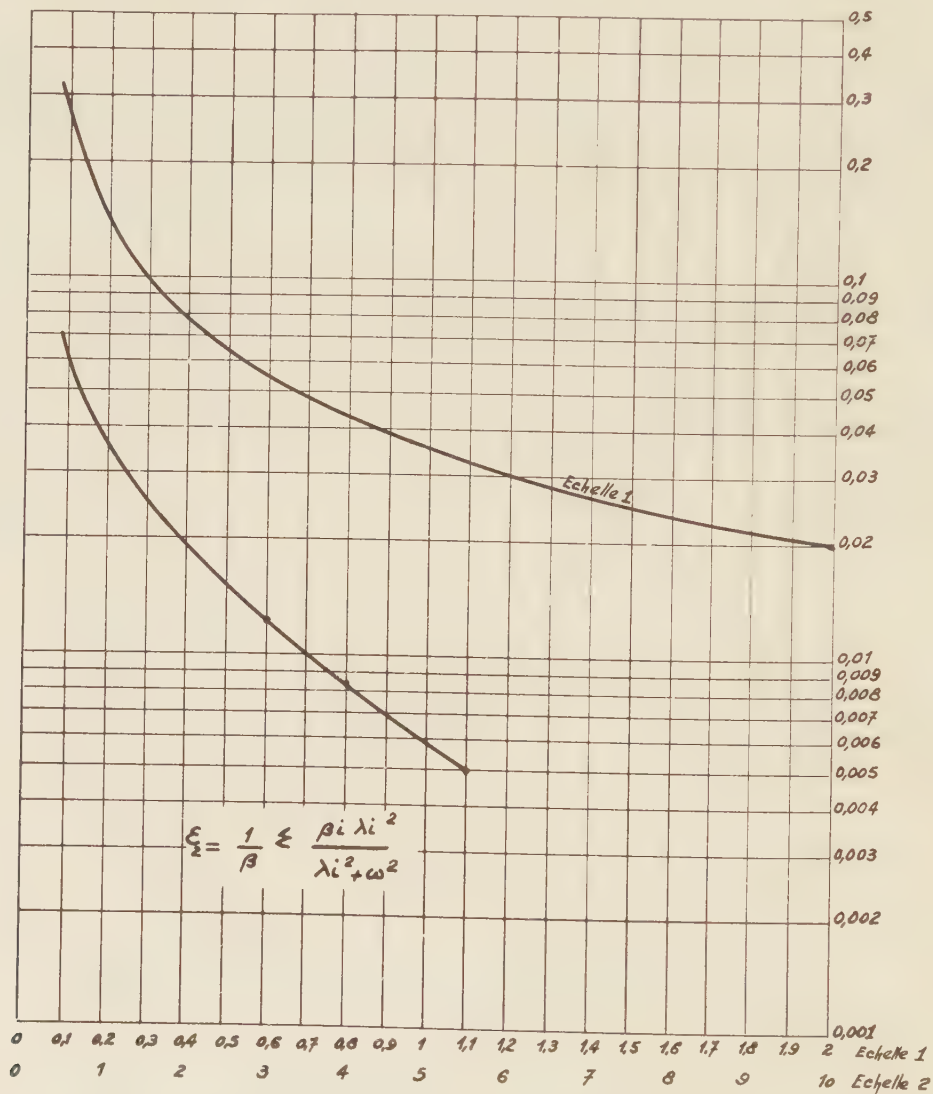


Fig. X. 2 - Terme correctif dépendant des neutrons retardés. (Pile ZOE).

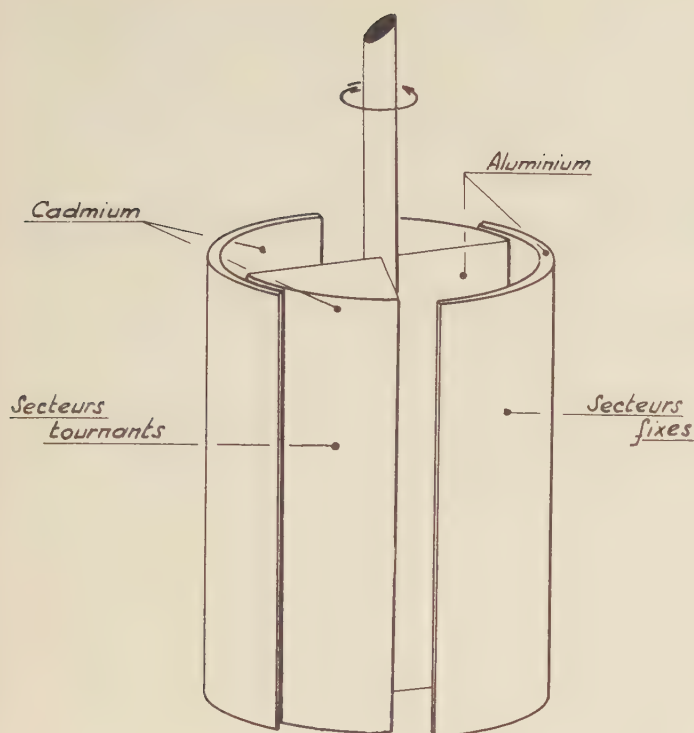


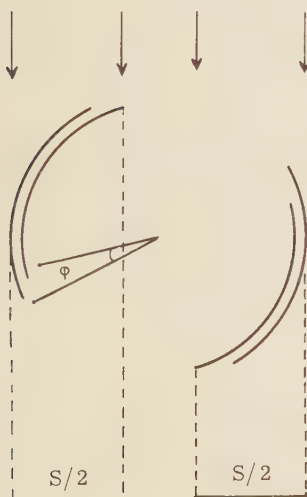
Fig. X. 3 - Modulateur à secteurs tournants.

il vient :

$$i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} = \beta (1 - \epsilon_2) + i\omega \theta_{00} \epsilon_1 \quad (10.6)$$

Les courbes X. 1 et X. 2 représentent les termes correctifs ϵ_1 et ϵ_2 en fonction de la fréquence, dans le cas de la pile Zoé.

Dispositif expérimental. Le dispositif de détection comprenant une chambre d'ionisation à courant est décrit au chapitre VIII.



Le modulateur est constitué par un cylindre d'aluminium recouvert de deux bandes de cadmium, formant deux secteurs diamétralement opposés et ouverts à 90°. Il tourne à l'intérieur d'un cylindre fixe constitué de façon identique (voir figure X. 3). Le cadmium étant un corps noir pour les neutrons thermiques, son absorption est indépendante de l'épaisseur. On obtient ainsi un cylindre de cadmium dont la surface latérale varie périodiquement, avec deux périodes par révolution.

Si on admet que les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre des directions des neutrons sont réparties d'une façon isotrope. Le nombre de neutrons absorbés est proportionnel à une surface effective de cadmium déterminée de la façon suivante :

soit ϕ l'angle de rotation du cylindre intérieur. L'origine est la position pour laquelle les secteurs fixes et mobiles se recouvrent (surface minimum). Puisque le cadmium est noir, l'ensemble est équivalent à deux secteurs diamétralement opposés d'ouverture $\frac{\pi}{2}$.

Soit S la projection de la surface de cadmium sur un plan parallèle à l'axe du cylindre.

$10^5 \beta_i$	$10^5 \delta \beta_i$ pour la pile Zoé	$\lambda_i^{-1} \text{ s}$
0, 10	0, 025	273. 600
0, 32	0, 08	22. 680
2, 4	0, 6	8. 640
2	0, 5	2. 340
3, 4	0, 85	660
7, 2	1, 8	20
21	5, 2	59
67	16, 8	3, 6

$$10^5 \delta \beta = 26$$

Tableau - photoneutrons dans l'eau lourde, contribution de ces neutrons pour une fission thermique dans la pile Zoé.

Dans la relation (5. 14) les neutrons retardés apparaissent dans le terme $i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}$, il est commode pour l'interprétation des expériences, de faire apparaître la partie principale de ce terme, quand ω devient important. On peut écrire :

$$i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} = \beta - \sum \frac{\beta_i \lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \omega^2} + i\omega \sum \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2}$$

$$\text{Posons :} \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\theta_{00}} \sum \frac{\beta_i \lambda_i}{\lambda_i^2 + \omega^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\beta} \sum \frac{\beta_i \lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \omega^2}$$

Si on fait tourner à vitesse constante l'ensemble des deux cylindres, on calcule aisément que la valeur moyenne de la surface projetée est :

$$\bar{S} = S_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi + 2\varphi}{4} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)$$

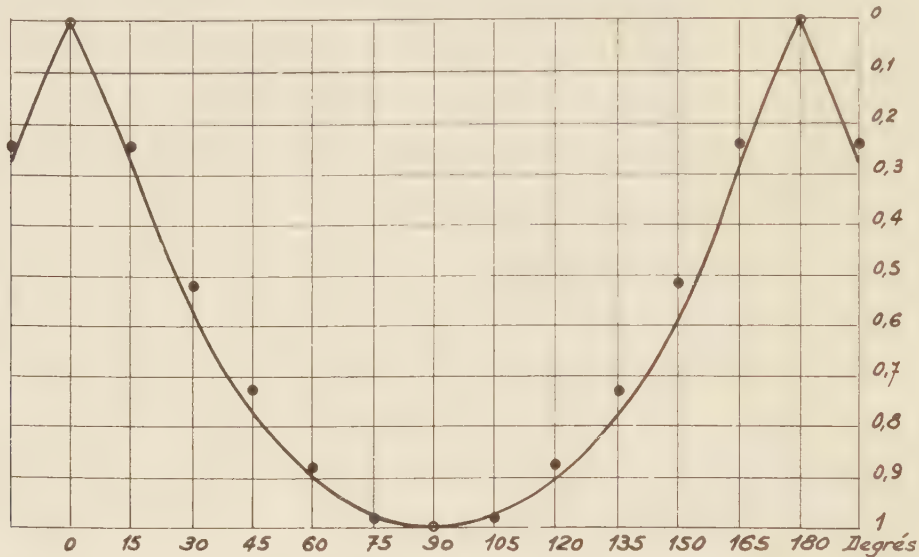
où S_0 est la surface projetée du cylindre d'aluminium.

Le nombre de neutrons absorbés, quand on admet l'isotropie des projections est proportionnel à la surface effective. Si ρ_0 est la réactivité équivalente au cylindre complètement ouvert (surface maximum). La réactivité pour un angle φ a pour valeur :

$$\rho = \rho_0 \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi + 2\varphi}{4} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \quad (10.7)$$

On a vérifié expérimentalement la relation (10.7) en plaçant le cylindre dans le canal central de la pile EL.2 et en mesurant en fonction de l'angle de rotation φ le taux de comptage c d'un compteur à BF 3 placé dans la pile, celle-ci étant maintenue sous critique pendant tout l'essai.

On a porté sur la figure X. 4 les résultats expérimentaux ainsi que la courbe théorique représentant la relation (10.7).



Points expérimentaux obtenus par la méthode sous-critique.

Fig. X. 4 - Courbe théorique et points expérimentaux représentant l'effet de capture du cylindre de cadmium en fonction de l'angle de rotation φ .

L'accord trouvé justifie l'hypothèse d'isotropie. La relation (10.7) a été établie en négligeant la différence de rayon des deux cylindres. Si on tient compte de cet écart, la courbe théorique passe par tous les points dans les limites des erreurs expérimentales qui sont inférieures à un pour cent.

Harmoniques de la modulation : On peut utiliser directement la relation (10.7) pour calculer le taux d'harmoniques produits par le modulateur.

$$\text{Valeur moyenne : } \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi + 2\varphi}{4} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \quad \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = 0,935$$

$$\text{harmonique d'ordre } n : \frac{\rho_n}{\rho_0} = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi + 2\varphi}{4} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \cos 2n\varphi d\varphi$$

$$\text{pour } n \gg 1 : \frac{\rho_n}{\rho_0} \approx -10^{-1} n^{-2}$$

fondamental : $\frac{p_1}{p_0} = -0,095$

harmonique 2 : $\frac{p_2}{p_0} = -0,0258$

harmonique 3 : $\frac{p_3}{p_0} = -0,0112$

La détection synchrone élimine les harmoniques pairs du signal mesuré et divise par leur ordre la contribution des harmoniques impairs. La pile ayant elle-même, une réponse sensiblement en ω^{-1} , on voit

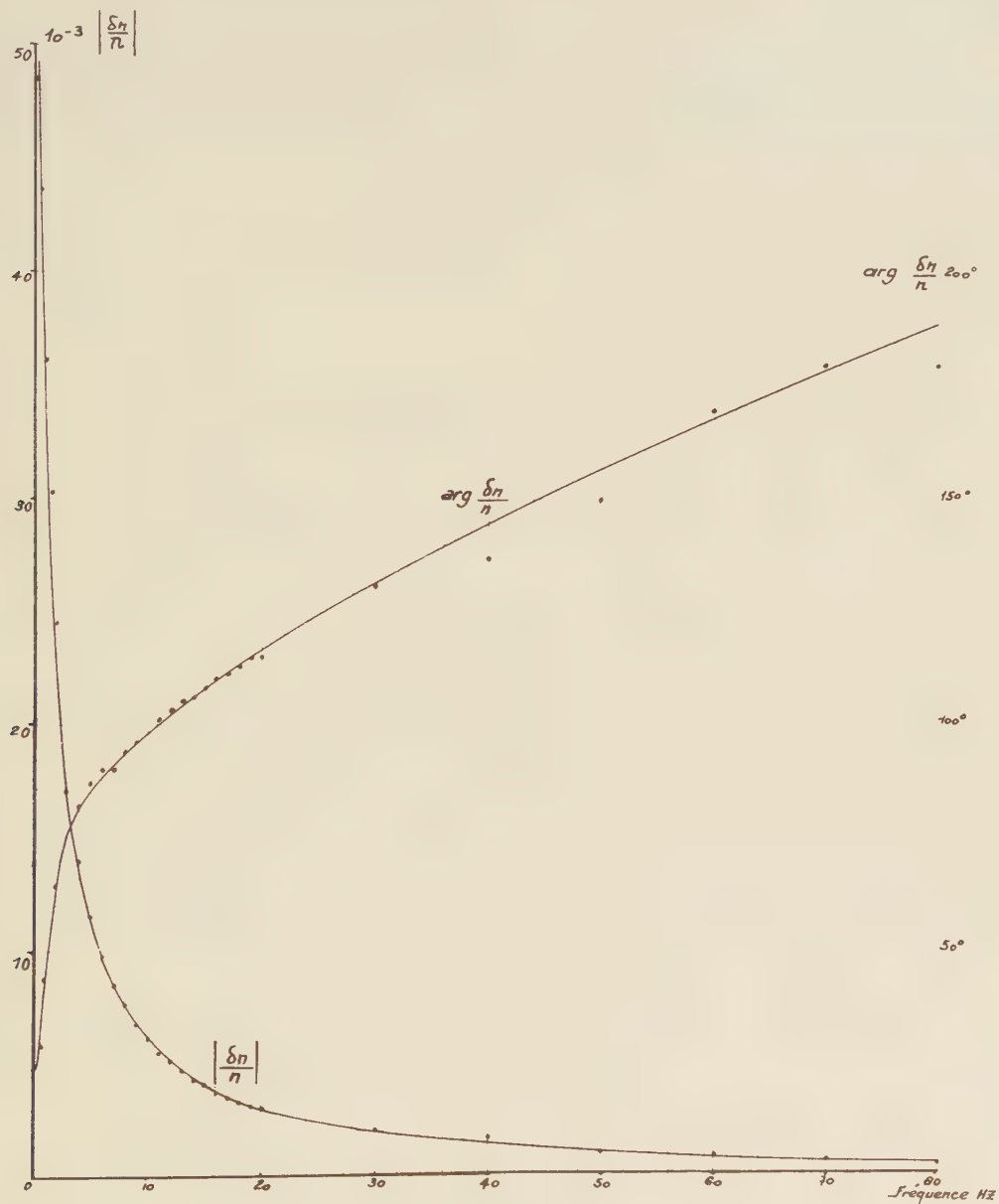


Fig. X. 5 - Amplitude et déphasage du taux de modulation du flux de neutrons dans la pile ZOF

que la contribution des harmoniques avec ce dispositif de modulation est inférieure à 3 pour cent, elle peut être négligée.

Bande passante du dispositif de mesure. La méthode pour mesurer la bande passante de ce dispositif a été décrite au chapitre VIII (voir figure VIII. 2). Elle est principalement limitée par l'inertie des ions formés dans la chambre. On peut diminuer le retard à la collection ionique et par conséquent élargir la bande passante, en augmentant le champ électrique entre les plateaux collecteurs de la chambre. Ceci est bien vérifié par l'expérience (voir courbes VIII. 3). On voit d'après ces courbes que pour un champ électrique de 1 000 V/cm qui a été utilisé dans ces expériences, le signal est correctement transmis jusqu'à 50 Hz.

Résultats expérimentaux. Le modulateur de cadmium étant placé dans le canal central de la pile, au point où le flux de neutrons est maximum, on mesure l'amplitude et le déphasage délivré par la chambre d'ionisation placée contre la cuve pour différentes vitesses de rotation du cylindre. Les résultats expérimentaux dans le cas de la pile Zoé sont portés sur la figure X. 5. D'après la relation (5. 14), on voit que le déphasage du signal ne devrait en aucun cas être supérieur à 90°. Ces expériences montrent donc l'importance des harmoniques de la distribution des neutrons à partir de 6 Hz. Le déphasage est d'ailleurs plus sensible à l'influence de ces harmoniques que l'amplitude. Il est commode d'utiliser une représentation linéaire de la relation (5. 14).

posons :

$$\frac{a_o}{b_o} = \frac{\delta n}{n} \quad \text{tg } \varphi = \arg \frac{a_o}{b_o}$$

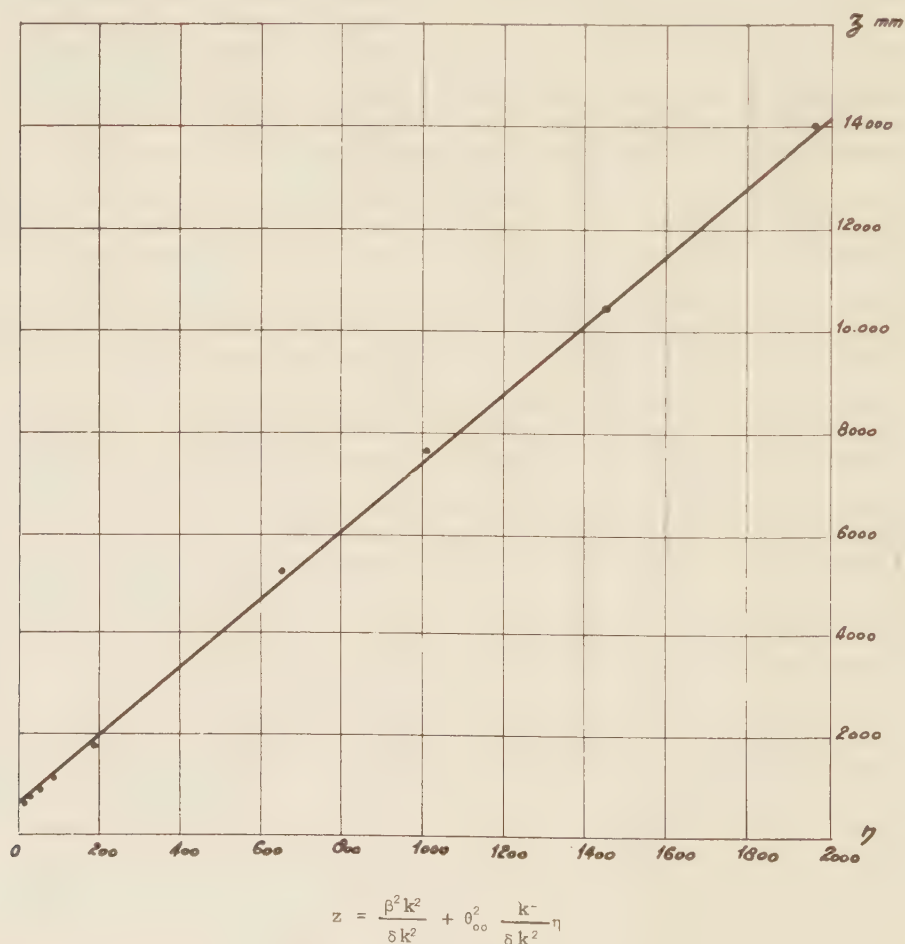


Fig. X. 6 - Reproduction des expériences de modulation dans la pile ZOE.

puis :

$$z = \frac{1}{(1 - \epsilon_2)^2} \left| \frac{n}{\delta n} \right|^2 \quad \eta = \left(\frac{1 + \epsilon_1}{1 - \epsilon_2} \right)^2 \omega^2$$

La relation (5.14) peut s'écrire :

$$z = \beta^2 \frac{k^2}{\delta k^2} + \theta_{00}^2 \frac{k^2}{\delta k^2} \eta$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \theta_{00}}{\beta} \frac{1 + \epsilon_1}{1 - \epsilon_2} \quad (10.9)$$

Nous avons porté sous cette forme les résultats expérimentaux relatifs au module (voir fig. X.6). La pente et l'ordonnée à l'origine de cette droite, calculées par la méthode des moindres carrés, donnent la vie moyenne pour le mode fondamental. On peut comparer cette dernière valeur à celle déduite par la relation de Nordheim à partir d'une expérience de divergence.

Dans le tableau suivant, on donne les résultats des mesures effectuées sur les piles à eau lourde Zoé [5], EL.2 [6], EL.3 [7], pour cette dernière pile on a réalisé deux réseaux, le réseau normal h_c et le réseau h obtenu en supprimant d'une façon régulière une barre sur trois, ce qui conduit à un accroissement du rayon de la cellule par le facteur $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

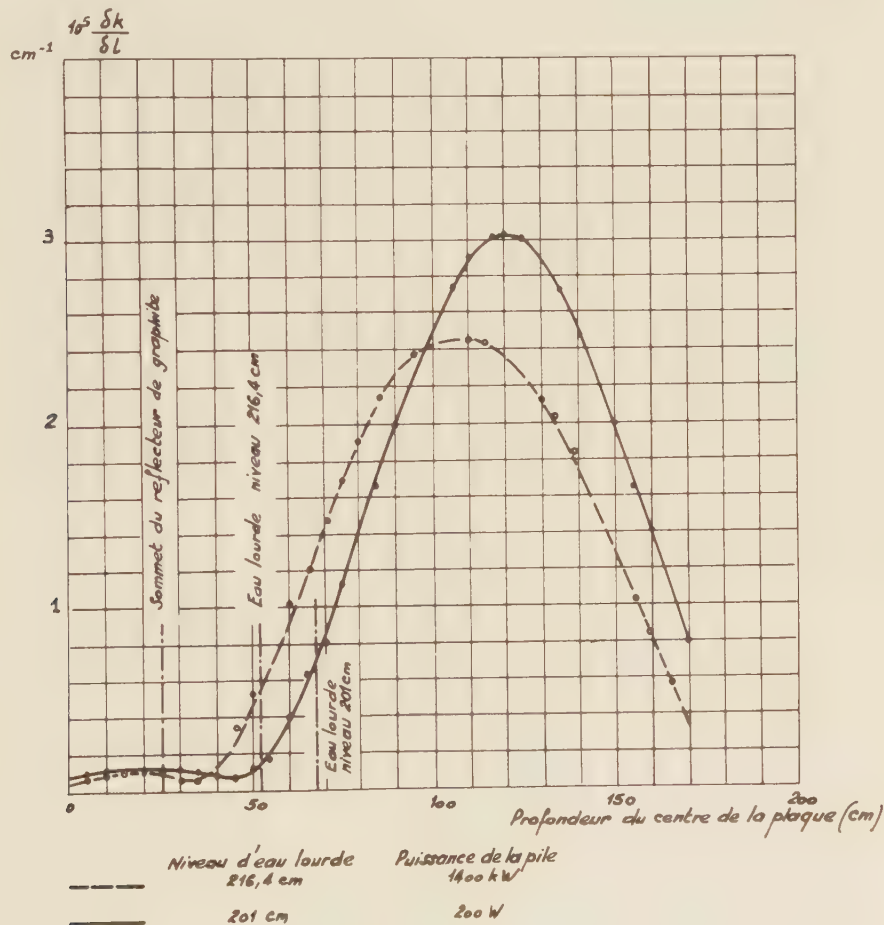


Fig. X. 7 - Effet différentiel de la plaque de réglage sud de la pile EL 2.

Pile	θ_{∞} calculé en millisecondes	θ_{∞} mesuré	$10^5 \frac{\delta k}{k}$ modulation	$10^5 \frac{\delta k}{k}$ Nordheim
Zoé	0,92	0,95 + 0,03	36 + 1	
EL. 2	0,99	1,00 ± 0,02	46,5 ± 1	44 ± 2,5
EL. 3 (h _c)	1,80	1,79		
EL. 3 (h)	2,10	2,00		

Tableau - Vie moyenne et réactivité mesurées par la méthode de modulation sur des piles à eau lourde.

Ce tableau fait apparaître l'accord entre la vie moyenne mesurée par cette méthode et calculée par la relation (5.12). Nous allons décrire deux applications importantes de cette méthode :

1) Etalonnage des barres de réglage. Une plaque de réglage est un absorbeur constitué par une feuille de cadmium ou du bore emprisonné entre deux feuilles d'aluminium. Son déplacement dans la pile provoque une variation correspondante du facteur de multiplication (relation 6.2). Un procédé commode

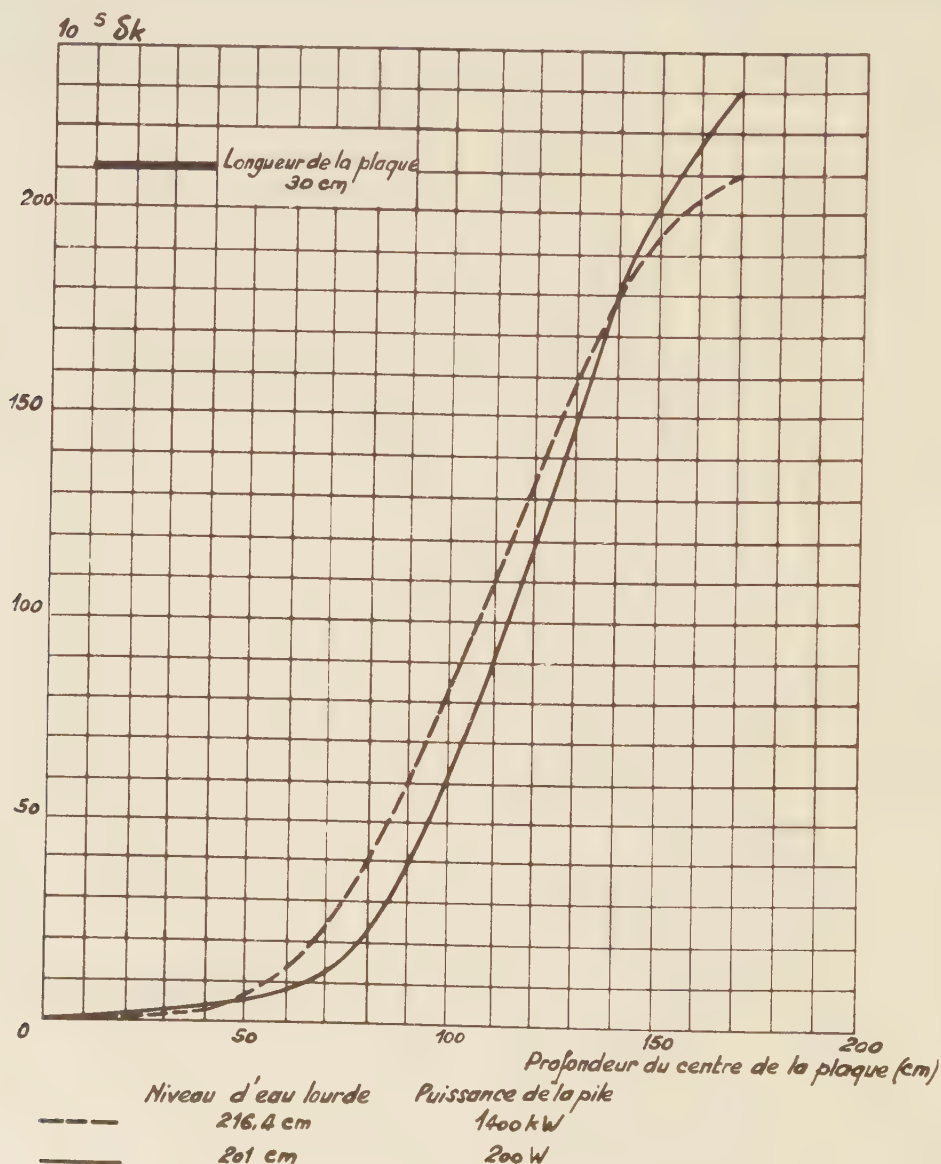


Fig. X. 8 - Effet global de la plaque de réglage sud de la pile EL 2.

[8] pour mesurer cette variation consiste à faire osciller la plaque autour d'une position donnée et à mesurer le taux de modulation de la densité. On en déduit d'après la relation (10.9) la variation de réactivité correspondant à un léger déplacement de la plaque autour de cette position. Dans la mesure, ce déplacement est égal à l'amplitude du fondamental du mouvement de la plaque. Cette méthode donne directement en valeur absolue l'effet différentiel de la plaque, qui est la caractéristique importante pour le pilotage de la pile. Par une intégration graphique ou numérique, on obtient l'effet total tel qu'il est mesuré dans les méthodes classiques.

Précautions à observer dans cette mesure. Il faut s'assurer qu'on ne mesure que le mode fondamental de la répartition des neutrons, ces conditions ont été exposées au chapitre VI. La réactivité mesurée correspond à un déplacement de la plaque égal à l'amplitude du fondamental du mouvement mécanique. Si l'oscillation mécanique n'est pas sinusoïdale, il faut enregistrer le mouvement et en déduire la composante de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$. Un procédé commode, consiste à lier la rotation d'un potentiomètre électrique au mouvement de la plaque et enregistrer la tension électrique aux bornes de ce potentiomètre quand il est alimenté par une tension continue. Enfin il faut s'assurer que le déplacement de la plaque est la seule perturbation imposée à la pile. Par exemple, si la fréquence d'oscillation est faible, on peut moduler la température qui réagit alors sur la réactivité. On évite cet effet en modifiant la fréquence d'oscillation.

Résultats expérimentaux. On a mesuré [8] l'effet des plaques de réglage de la pile EL. 2 pour deux niveaux d'eau lourde. La fréquence d'oscillation est de 0,22 Hz et l'amplitude du fondamental du mouve-

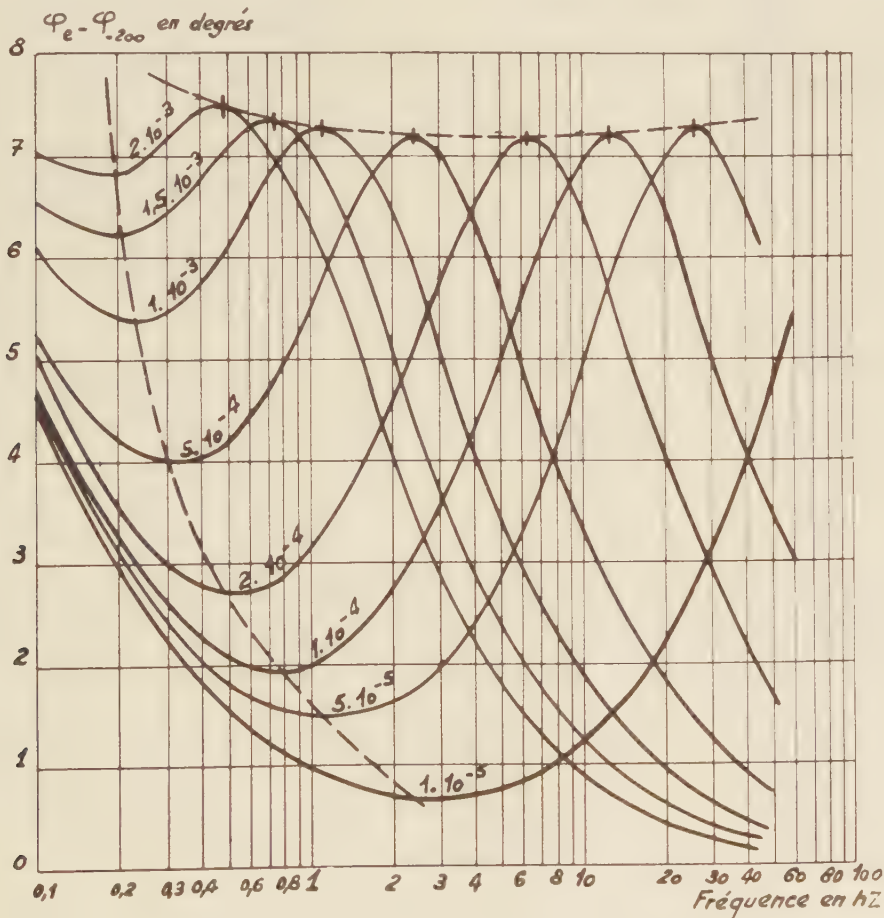


Fig. X.9 - Sensibilité en fonction du temps de vie θ .

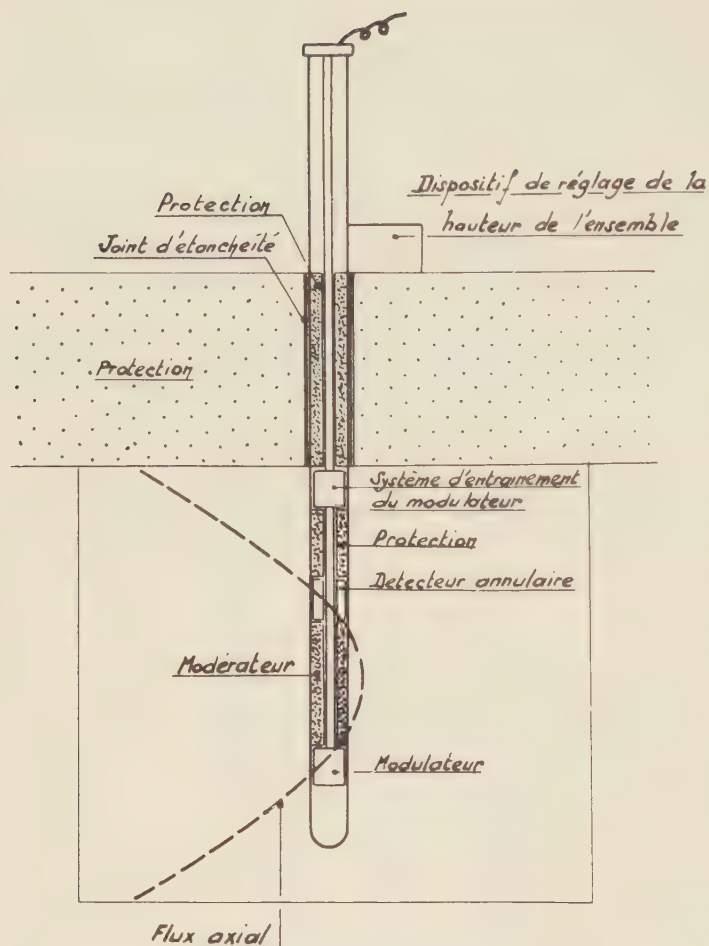


Fig. X. 10 - Sonde de réactivité.

ment de 1,75 cm. La courbe X. 7 représente l'effet différentiel en fonction de la position du centre de la plaque. L'intégration de cette courbe, donne l'effet total représenté sur la courbe X. 8.

Cette méthode a été appliquée par la suite aux piles Zoé [9], EL. 3 [7] et G. 1 [10]-dans ce dernier cas, l'effet des harmoniques de la distribution des neutrons n'est pas négligeable mais peut être traité comme un terme correctif (relation 6. 11).

2) Pilotage d'une pile en régime sous critique. L'état d'une pile est défini par la valeur du facteur de multiplication effectif. S'il est inférieur à l'unité, la pile est sous critique. Il est important de connaître l'état de la pile en régime sous critique, afin de régler la vitesse des barres de contrôle. On peut connaître [11] immédiatement cet état en perturbant périodiquement la réactivité avec un absorbeur et en observant le déphasage du taux de modulation de la densité des neutrons. On voit d'après (5. 11) et (5. 14) que ce taux de modulation pour une pile sous critique ($k < k_0$) est donné par la relation :

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta k}{k} \frac{1 - i\omega \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega}}{\frac{k_0 - k}{k} + i\omega \left(\theta_{00} + \sum \frac{\beta_i}{\lambda_i + i\omega} \right)} \quad (10. 10)$$

En utilisant les expressions (10. 6), le déphasage du taux de modulation peut s'écrire :

$$\tan \varphi = \frac{\omega \theta_{00} (1 + \varepsilon_1)}{\frac{k_0 - k}{k} + \beta (1 - \varepsilon_2)} \quad (10. 11)$$

Pour une fréquence d'oscillation donnée, ce déphasage ne dépend que de la vie moyenne, des caractéristiques des neutrons

retardés et de l'état de la pile. Il permet de mesurer celui-ci. On a représenté sur la figure X. 9 le déphasage entre deux états de la pile (critique et sous critique de $200 \cdot 10^{-5}$), en fonction de la fréquence d'oscillation, chaque courbe ayant pour paramètre la vie moyenne des neutrons. On voit qu'il existe toujours une fréquence pour laquelle on observe un déphasage de l'ordre de 7° entre ces deux états. La précision courante dans ces mesures est de $0,5^\circ$. On décèle ainsi aisément des différences de $15 \cdot 10^{-5}$.

Déphasage en régime dynamique. La relation (10. 10) a été établie en supposant que le facteur de multiplication et, par conséquent, les densités de neutrons étaient constantes en moyenne. Il n'en est plus de même pendant la phase de démarrage du réacteur.

Pour tenir compte de cet effet, on doit écrire ces grandeurs sous la forme suivante :

$$k = k(t) + \delta k e^{i\omega t}$$

$$\phi = \phi(t) \left(1 + \frac{\delta \phi}{\phi} e^{i\omega t} \right)$$

$$c_i = c_i(t) \left(1 + \frac{\delta c_i}{c_i} e^{i\omega t} \right)$$

et porter ces expressions dans le système I du chapitre IV. Ce calcul a été fait dans la note CEA n° 166 [11]. La solution numérique dans le cas où la réactivité croît linéairement avec le temps a été obtenue à la machine IBM 650. Jusqu'à des vitesses d'accroissement de $20 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ du facteur de multiplication il n'y a pas de retard appréciable de la phase par rapport à sa valeur statique. Cette vitesse est considérable, on peut donc admettre que la pile n'introduit pas de retard de phase pendant la période de démarrage.

Des expériences en régime statique et dynamique, effectuées avec la pile Zoé ont confirmé ces considérations.

Sonde de réactivité. Cette étude nous a conduit à envisager une sonde constituée par un tube contenant le modulateur, et une chambre d'ionisation annulaire à travers laquelle passe l'arbre transmettant le mouvement au modulateur. Le tube est placé dans un canal de la pile, par exemple un canal contenant normalement un élément de combustible. Le tube est retiré progressivement à mesure que l'état de la pile s'approche de l'état critique et il est dehors dès que la pile diverge (voir fig. X, 10).

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE X.

- [1] KEEPIN G.R., WIMETT T.F. - Nucleonics, oct. 1958, Vol. 16, n° 10.
- [2] RAIEVSKI V., TANGUY P. - note C.E.A., 1956, n° 161.
- [3] BERNSTEIN et al. - Phys. Rev., 1947, 72, 570.
- [4] LIPKIN H. - note C.E.A., 1954, n° 49.
- [5] RAIEVSKI V. - Résultats non publiés, 1953.
- [6] RAIEVSKI V. - C.R. Acad. Sciences, 1953, t. 237, p.1513-1515.
- [7] Etude expérimentale de la pile EL. 3, Rapport CEA, 1958, n° 794.
- [8] RAIEVSKI V. - note C.E.A., 1954, n° 73.
- [9] BRETON D., VIDAL R. - note C.E.A., 1956, n° 175.
- [10] BRETON D., LEROY J., VIDAL R. - Rapport CEA, 1957, n° 670 H.
- [11] LACOUR J., RAIEVSKI V. - note C.E.A., 1957, n° 166.

CHAPITRE XI

MESURE DU LIBRE PARCOURS MOYEN DE TRANSPORT DES NEUTRONS THERMIQUES

Le libre parcours moyen de transport est une grandeur fondamentale de la théorie de la diffusion des neutrons. Son expression a été donnée au chapitre III.

$$\lambda_t = \frac{\ell_t}{1 - \bar{\mu} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t}}$$

où ℓ_t est le libre parcours moyen entre deux chocs, Σ_s et Σ_t les sections efficaces macroscopiques pour un choc de diffusion et pour un choc quelconque, $\bar{\mu}$ la valeur du cosinus de l'angle de déviation du neutron après un choc de diffusion.

λ_t est une moyenne prise sur le spectre des vitesses des neutrons thermiques. (voir chapitre II).

La connaissance précise de λ_t pour des matériaux utilisés comme modérateurs ou réflecteurs dans les piles est importante car elle permet d'évaluer la perte des neutrons par fuite. De plus elle permet, en mesurant par ailleurs la longueur de diffusion L , d'obtenir la section efficace d'absorption qu'il est impossible ou difficile d'obtenir par d'autres méthodes dans le cas des modérateurs usuels.

La méthode de modulation permet d'atteindre cette grandeur.

Principe de la méthode [1] : Considérons dans un milieu diffusant et ralentisseur, une source émettant à l'instant θ , S_0 neutrons suivant une répartition en phase $f(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega})$. Soit $N_0(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, t - \theta)$, la densité en phase des neutrons à l'instant t .

Supposons maintenant qu'il existe dans le milieu, un processus faisant disparaître ces neutrons avec une probabilité indépendante de la vitesse, soit τ^{-1} cette probabilité. La densité en phase à l'instant t est

la même que celle produite par une source émettant $S_0 e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}$ neutrons à l'instant θ . On peut écrire dans ce cas :

$$N(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, t - \theta) = e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} N_0(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, t - \theta)$$

Si la source est stationnaire, et émet $S d\theta$ neutrons dans le temps $d\theta$, la densité en phase sera stationnaire et aura pour valeur :

$$N(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{S_0} \int_t^{-\infty} e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} N_0(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, t - \theta) S d\theta$$

Si l'amplitude de la source est modulée à la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, la densité en phase sera modulée à la même fréquence et aura pour valeur :

$$N(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}) e^{i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{S_0} \int_t^{-\infty} e^{-(t-\theta)(\frac{1}{\tau} + i\omega)} N_0(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, t - \theta) S d\theta$$

Dans le modérateur la section efficace d'absorption du neutron suit une loi en $1/v$, il en résulte que la probabilité de capture $\tau^{-1} = v \bar{\Sigma}_c$ est indépendante de la vitesse des neutrons, la relation précédente montre que l'influence de la modulation sur la distribution en phase des neutrons est équivalente à l'addition d'une section efficace purement complexe de valeur $\frac{i\omega}{v}$.

En théorie élémentaire, la densité des neutrons à une distance r d'une source ponctuelle d'intensité S , a pour expression :

$$n = \frac{S}{4\pi D} \frac{e^{-\frac{r}{L}}}{r} \quad (11.1)$$

où :

$$L^{-1} = D^{-1/2} (v \Sigma_c)^{1/2}$$

et :

$$D = \frac{\lambda_t v}{3}$$

Si l'émission de la source varie périodiquement avec une fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$, la partie variable de la densité aura pour valeur :

$$\delta n = \frac{\delta S}{4\pi D} \frac{e^{-\frac{r}{L_\omega}}}{r} \quad (11.2)$$

où :

$$L_\omega^{-1} = D^{-1/2} (v \Sigma_c + i \omega)^{1/2}$$

La mesure de la répartition variable δn permet d'obtenir la longueur de diffusion complexe (l. d. c.) d'où on en déduit la section de capture et le libre parcours moyen de transport des neutrons.

Mesure de la longueur de diffusion complexe. Le taux de modulation de la densité $\frac{\delta n}{n}$ est une grandeur complexe dépendant de la position et de la fréquence. Au chapitre VIII nous avons décrit le dispositif permettant d'obtenir les composantes en phase et en quadrature du taux de modulation de la densité, d'où on en déduit son module et sa phase.

D'après (11.1) et (11.2) on peut écrire :

$$\text{Log} \left| \frac{\delta n}{n} \right| = \text{Log} \frac{\delta S}{S} + r L^{-1} - r \Re L_\omega^{-1}$$

$$\text{Arg} \frac{\delta n}{n} = -r \Im L_\omega^{-1}$$

où $\Re$ et $\Im$ représentent les parties réelles et imaginaires de l'expression complexe L_ω^{-1} .

Si $\frac{v \Sigma_c}{\omega} \ll 1$, on peut utiliser l'expression approchée suivante de L_ω^{-1} :

$$L_\omega^{-1} = (2D)^{-1/2} (X + i Y)$$

où :

$$X = \left(1 + \frac{v \Sigma_c}{2\omega} \right) \omega^{1/2}$$

$$Y = \left(1 - \frac{v \Sigma_c}{2\omega} \right) \omega^{1/2}$$

d'où on en déduit :

$$\text{Log} \left| \frac{\delta n}{n} \right| = \text{Log} \frac{\delta S}{S} + r L^{-1} - r (2D)^{-1/2} X \quad (11.3)$$

$$\text{Arg} \frac{\delta n}{n} = -r (2D)^{-1/2} Y \quad (11.4)$$

Les relations (11.3) et (11.4) permettent une représentation linéaire des résultats expérimentaux. On en déduit la valeur du coefficient de diffusion D .

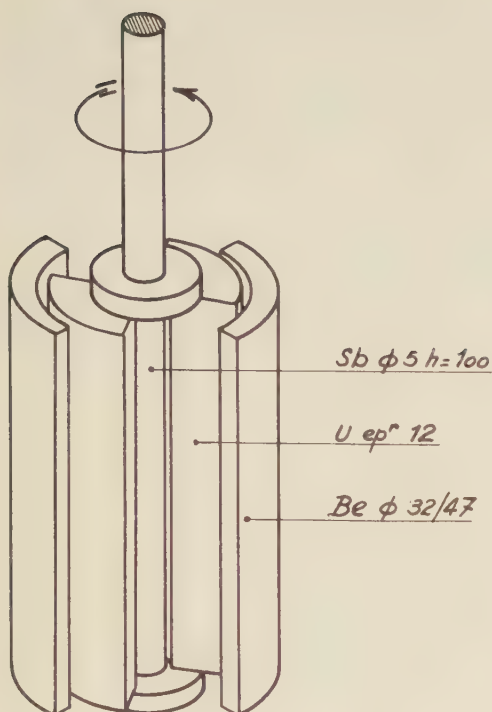


Fig. XI.1 - Source modulée Sb-Be utilisée dans la mesure du λ_i de l'eau lourde.

Exploitation des résultats relatifs au module. On mesure $\text{Log} \left| \frac{\delta n}{n} \right|$ en fonction de la fréquence pour différentes positions du compteur. Pour chacune de ces positions on obtient une droite, dont la pente pm d'après (11.3) a pour valeur :

$$\text{pm} = -r (2D)^{-1/2}$$

On porte ensuite la valeur de pm ainsi obtenue en fonction de la position r ce qui donne le coefficient de diffusion.

Exploitation des résultats relatifs à la phase. Le dispositif expérimental introduit un déphasage parasite dépendant de la fréquence, dû au temps de vol des neutrons. Pour éliminer cet effet, il est préférable de déterminer d'abord la pente p φ des droites représentant $\text{Arg} \frac{\delta n}{n}$ en fonction de r. D'après (11.4) on a :

$$p\varphi = - (2D)^{1/2} Y$$

on porte ensuite p φ en fonction de Y et on obtient le coefficient de diffusion.

Pour obtenir à partir du coefficient de diffusion, le l. p. m. de transport, on admet que la vitesse moyenne des neutrons est celle donnée par une répartition de Maxwell à la température du modérateur. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la vie moyenne des neutrons dans le milieu pour tous les processus tendant à les faire disparaître est suffisamment grande pour qu'un équilibre thermodynamique soit atteint.

Mesure de l. p. m. de transport des neutrons thermiques dans l'eau lourde. La mesure a été faite dans la cuve de la pile EL.2 de Saclay, contenant six tonnes d'eau lourde, les barres d'uranium étant enlevées.

La source est constituée par une tige de radio antimoine ($\phi = 5$ mm, H = 100 mm) placée suivant l'axe de deux secteurs de béryllium d'ouverture 90° et diamétralement opposés ($\phi_{\text{int}} = 32$ mm, $\phi_{\text{ext}} = 47$ mm). Un écran constitué par un matériau de densité élevée permet de moduler l'intensité du rayonnement γ reçu par le béryllium, il est constitué par deux secteurs d'uranium d'une épaisseur de 12 mm tournant entre le béryllium et l'antimoine (voir fig. XI.1). Après une irradiation de l'antimoine pendant une semaine dans un flux de 10^{12} n/cm²/s, on obtient une source émettant $5 \cdot 10^5$ n/s, la profondeur de modulation est de 70 pour cent, de crête à crête.

Le dispositif de détection comprend un compteur proportionnel à ¹⁰BF 3 suivi de l'appareillage de détection synchrone des impulsions décrit au chapitre VIII.

Le tableau ci-après permet de comparer la valeur obtenue par cette méthode à celles fournies par des méthodes différentes [2].

Valeur	Erreur	Méthode	Auteurs	Date	Référence
2,40 cm	$\pm 0,10$	longueur d'extrapolation.	{ Auger Munn Pontecorvo	1947	(3)
2,52	$\pm 0,04$	empoisonnement	{ Kash Woods	1953	(4)
2,45	$\pm 0,07$	l. d. c.	{ Raievski Horowitz	1954	(5)

Tableau - l. p. m. de transport de l'eau lourde pure à la température ambiante.

Mesure du l. p. m. de transport des neutrons thermiques dans le graphite. La mesure a été faite dans un bloc de graphite parallélépipédique de dimensions (160 x 160 x 180 cm).

Le bloc est percé d'un canal suivant son grand axe, qui contient une cible de polythène ($\phi = 18,5$ mm, $H = 15$ mm) située à 50 cm d'une des faces et un compteur à $^{10}\text{BF}3$ ($\phi = 8$ mm, $H = 30$ mm), la portion du canal comprise entre la cible et le compteur est obturée par des cylindres de graphite qui permettent de faire varier sa longueur. Il en est de même de la portion comprise au-delà du compteur, un espace étant ménagé dans le cylindre de graphite pour le passage du coaxial (voir fig. XI. 2).

Le bloc de graphite est placé devant un canal de la pile EL. 2 de façon que les neutrons issus de ce canal frappent la cible. Le faisceau de neutrons est soigneusement collimaté afin d'éviter qu'il ne touche les parois du canal ce qui donnerait naissance à des sources parasites. La modulation du faisceau est obtenue en faisant tourner un disque de cadmium profilé emprisonné entre deux plaques d'aluminium (voir fig. XI. 3).

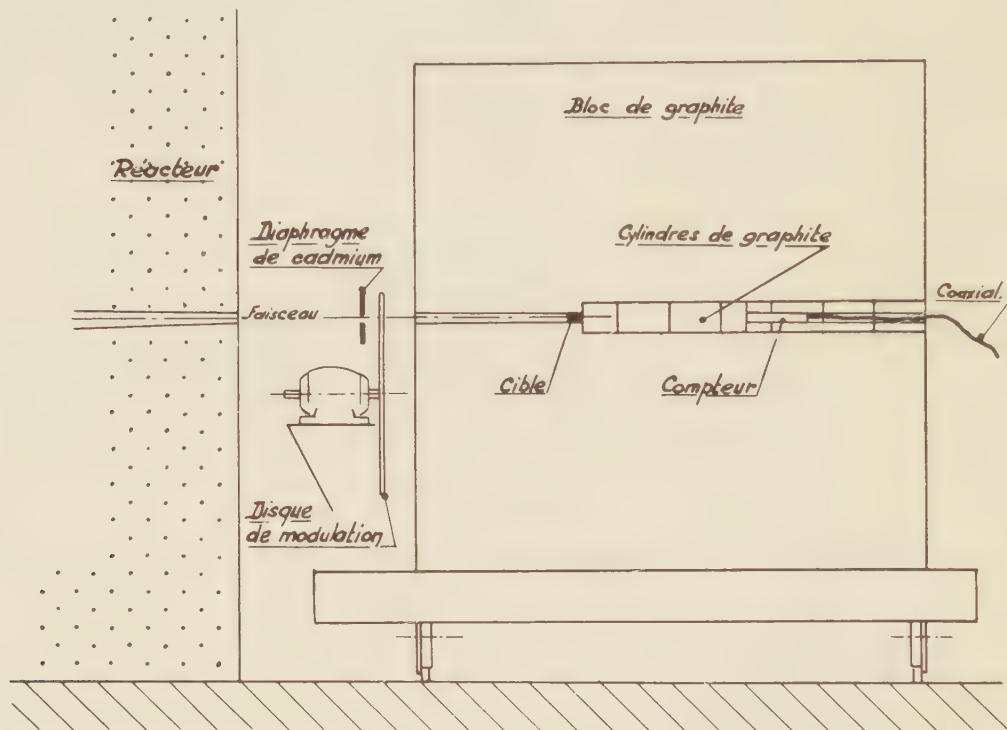


Fig. XI. 2 - Dispositif expérimental utilisé pour la mesure du λ_t du graphite.

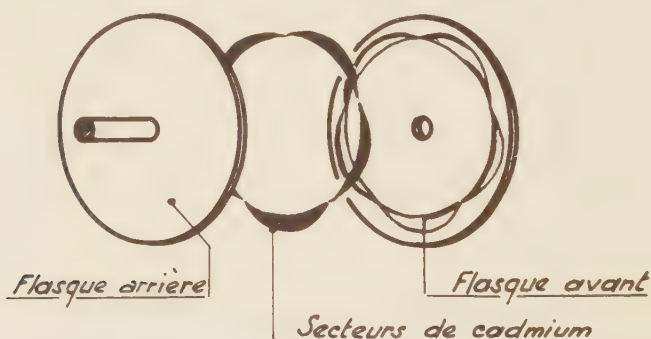


Fig. XI. 3 - Disque utilisé pour la modulation du faisceau de neutrons dans la mesure du λ_t du graphite.

La cible joue ainsi le rôle d'une source ponctuelle modulée de neutrons, la fréquence de modulation dépendant de la vitesse de rotation du disque et du nombre de lobes du disque de cadmium. Dans ces expériences on a utilisé un disque à cinq lobes, ce qui permet d'obtenir une fréquence de modulation comprise entre 50 Hz et 500 Hz.

On a porté sur les courbes des figures (XI. 4 à XI. 7) les résultats expérimentaux, d'où on déduit le l.p.m. de transport. Ces résultats sont comparés dans le tableau suivant à ceux donnés par d'autres méthodes.

Valeur	Erreur	Méthode	Auteurs	Date	Référence
2,73	non indiquée	non indiquée	cité par Hughes	1953	6
2,55	$\pm 0,09$	l.d.c.	{ Raievski Horowitz	1955	(1)
2,50	$\pm 0,04$	impulsion	Antonov et al	1955	7
2,58	$\pm 0,02$	impulsion	Beckurts (1)	1957	8
2,53	$\pm 0,03$	l.d.c.	Droulers Lacour Raievski	1958	9

Tableau - l.p.m. de transport du graphite de densité 1,6 à la température ambiante.

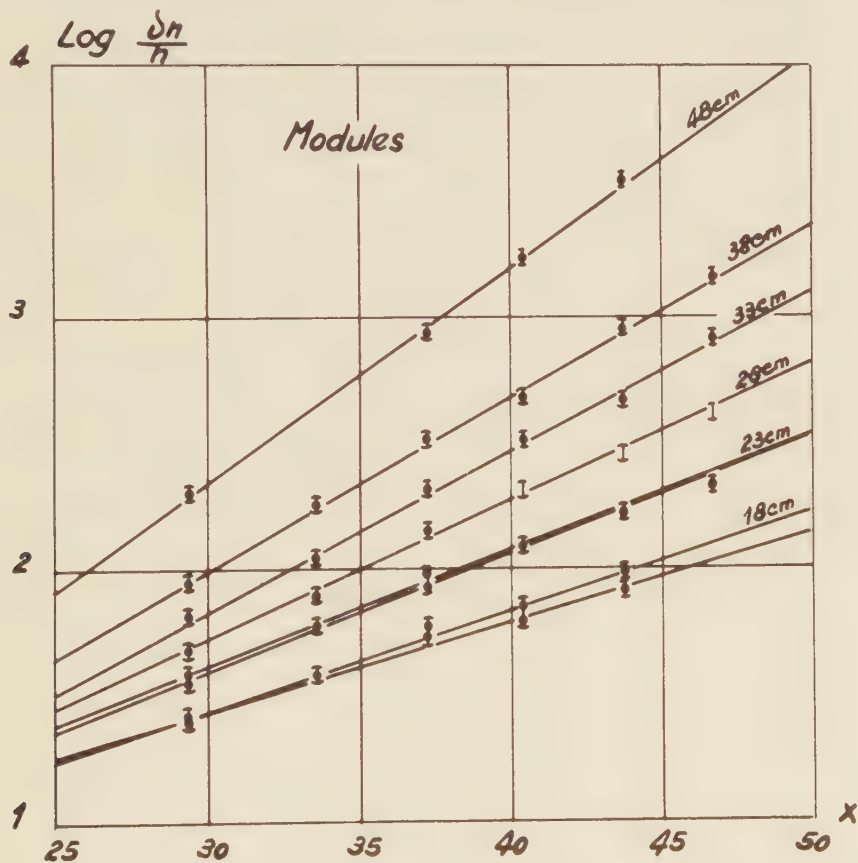


Fig. XI. 4 - $\text{Log } \frac{\delta n}{n}$ en fonction de X.

- (1) Beckurts ayant repris ses expériences avec du graphite français a retrouvé la valeur 2,53 que nous avons obtenue. D'après Beckurts, l'écart avec la valeur 2,58 qu'il avait obtenue précédemment pourrait s'expliquer par la différence de texture et de dimensions des grains, le graphite allemand étant particulièrement dense (2,05 à 2,08 g/cm³).

Validité de l'approximation monoénergétique. La théorie monoénergétique est valable pour des neutrons en équilibre thermodynamique avec le milieu modérateur. Les neutrons issus de la source ou diffusés par la cible ne sont pas en équilibre avec le milieu. Dans l'expérience avec le graphite par exemple, le spectre de neutrons issus de la pile diffère légèrement de la répartition maxwellienne dans le modérateur. et le spectre de neutrons diffusés par la cible est déformé par le retard dû au temps de vol. Une étude qualitative de ce phénomène a été faite [10], elle montre que pour tous les modérateurs usuels, où le rapport $\frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_c}$ est très grand devant l'unité, l'équilibre thermodynamique est atteint après quelques chocs dans le modérateur et que la théorie monoénergétique est valable pour l'interprétation de ces expériences, à condition d'effectuer les mesures à une distance supérieure à quelques l. p. m. de transport à partir de la cible, ce qui est le cas pour les expériences décrites dans ce chapitre.

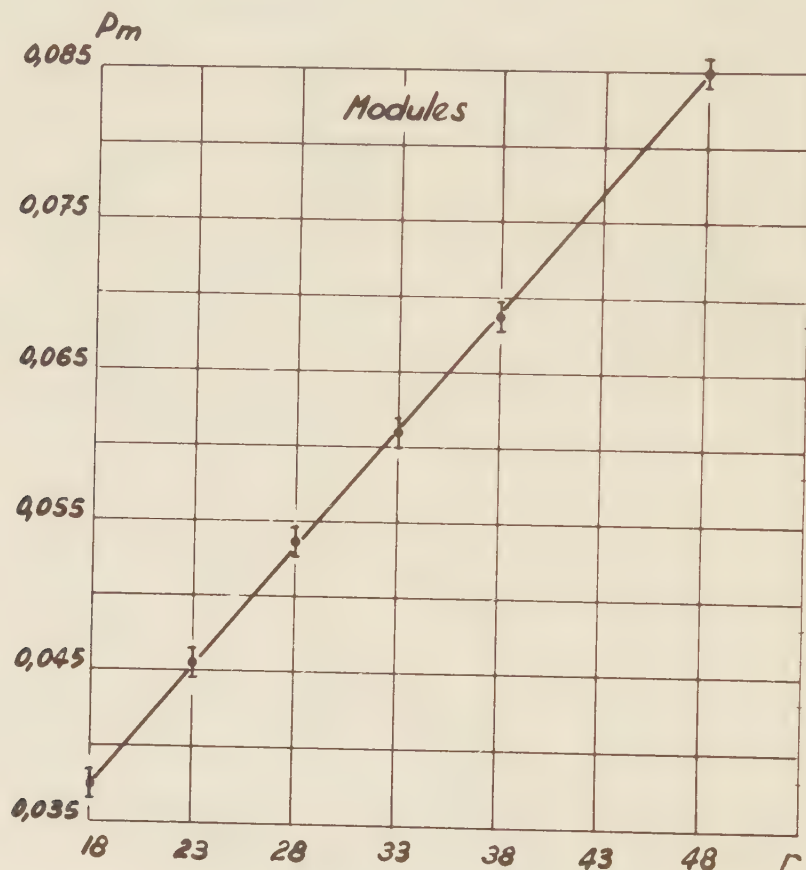


Fig. XI.5 - P_m en fonction de r .

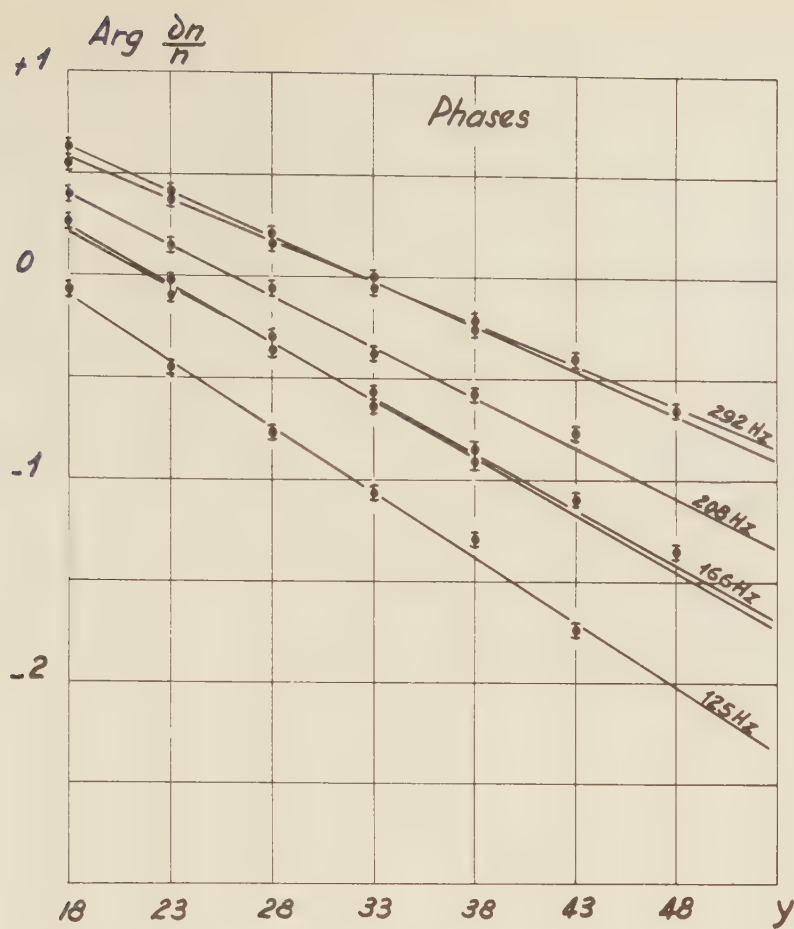


Fig. XI.6 - $\text{Arg } \frac{\delta n}{n}$ en fonction de Y.

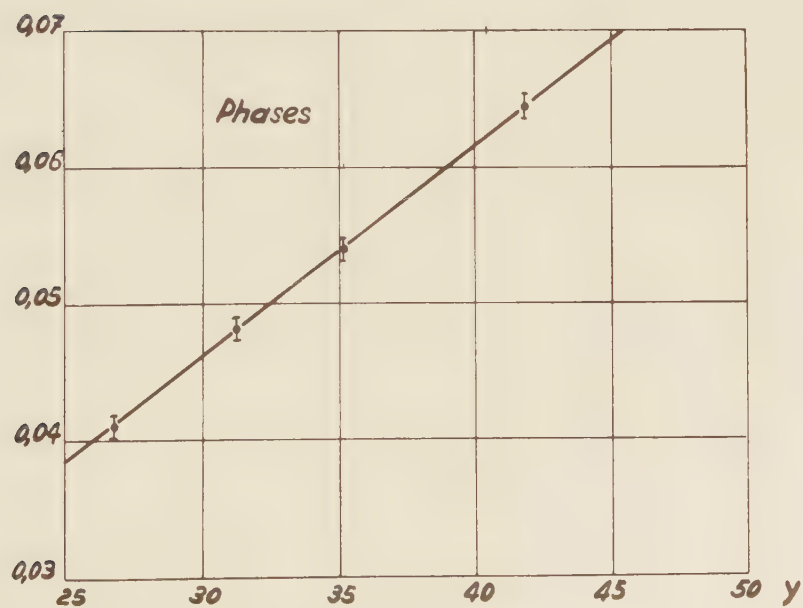


Fig. XI.7 - P_ϕ en fonction de Y.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE XI.

- [1] RAIEVSKI V., HOROWITZ J. - Conférence de Genève, V. rapport P/360 (1955).
- [2] HOROWITZ J. - N. 2 Supplemento al Vol. 4, série X del Nuovo. Cimento, pages 1335-1341 (1956).
- [3] AUGER P.; MUNN A.M., PONTECORVO B. - Can. Journ. Res., A 25, 143 (1947).
- [4] KASCH S.W., WOODS D.C. - Phys. Rev. 90, 564 (1953).
- [5] RAIEVSKI V., HOROWITZ J. - Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 238, p. 1993-1955, séance du 17 mars 1954.
- [6] HUGHES D.J. - (1953). Pile neutron research.
- [7] ANTONOV A.V. et al (1955) - Conférence de Genève V, rapport P/661.
- [8] BECKURTS K.H. (1957) - Nucl. Sci. Eng. 2, 516.
- [9] DROULERS Y., LACOUR J., RAIEVSKI V. - J. Nuclear Energy, 1958, Vol. 7, pp. 210 à 214.
- [10] PONTIS C., RAIEVSKI V. - Rapport S. P. M. n° 565.

CHAPITRE XII

MESURE DE LA TEMPÉRATURE DES NEUTRONS DANS UNE PILE

Les sections efficaces des réactions nucléaires avec les neutrons dépendent de leur vitesse, aussi la connaissance du spectre des vitesses des neutrons dans une pile permet de déterminer la fréquence moyenne d'une réaction nucléaire et en particulier les probabilités de capture et de fuite. On a montré au chapitre IV que dans une pile à neutrons thermiques ces réactions étaient provoquées principalement par les neutrons ayant atteint un équilibre thermodynamique, dans ces conditions leur spectre est bien représenté par une loi de Maxwell, et l'expérience doit permettre la mesure de la température de ce spectre.

1) Principe de la méthode. Considérons à la sortie d'un canal, un faisceau de neutrons issus du coeur de la pile. Le nombre de neutrons dont la vitesse est comprise entre v et $v + dv$ qui traversent par unité de temps la section droite du canal est $n(v) v dv$ où $n(v)$ est la loi de répartition en vitesse des neutrons du faisceau. Entre deux sections droites du faisceau distantes d'une longueur l , ces neutrons vont subir un retard l/v .

Si on module l'aire de la section droite du faisceau à la sortie du canal, par exemple en l'obturant périodiquement avec un diaphragme en cadmium, et si on détecte les neutrons atteignant une cible placée dans le faisceau à une distance l du modérateur, on obtient un signal modulé à la même fréquence, dont la phase et le module dépendent de la fréquence de modulation, de la distance l et du spectre des neutrons. On peut alors rechercher la température du spectre de Maxwell qui représente au mieux les résultats expérimentaux. Le critère étant donné par exemple par la méthode des moindres carrés.

2) Théorie de la méthode. Soit S_0 l'aire de la section droite du faisceau délimitée par un diaphragme fixe. Si ce diaphragme est obturé périodiquement par un diaphragme mobile permettant de faire varier suivant une loi sinusoïdale la section droite du faisceau, les sections ouverte et obturée du faisceau, à l'instant t , auront respectivement pour valeurs :

$$\frac{S_0}{2} (1 + e^{i\omega t}) \text{ et } \frac{S_0}{2} (1 - e^{i\omega t})$$

Soit $p_1(v)$ la probabilité de capture des neutrons de vitesse v par le cadmium du diaphragme mobile. Le nombre de neutrons de vitesse v ayant traversé ce diaphragme à l'instant t sera :

$$\left\{ \frac{S_0}{2} (1 + e^{i\omega t}) + \left[1 - p_1(v) \right] \frac{S_0}{2} (1 - e^{i\omega t}) \right\} n(v) dv$$

Si $p_2(v)$ est la probabilité d'absorption de ces neutrons quand ils frappent la cible située à une distance l du diaphragme. Le nombre de neutrons absorbés par la cible à l'instant t s'écrit :

$$\frac{S_0}{2} \int_0^\infty n(v) v dv \left[2 - p_1(v) + p_1(v) e^{i\omega(t - \frac{l}{v})} \right] p_2(v)$$

On peut séparer cette expression en une partie constante et une partie variable :

$$\text{partie constante : } \frac{S_0}{2} \int_0^\infty p_2(v) \left[2 - p_1(v) \right] n(v) v dv$$

$$\text{partie variable : } e^{i\omega t} \frac{S_0}{2} \int_0^\infty p_1(v) p_2(v) e^{-i\omega \frac{l}{v}} n(v) v dv$$

Le dispositif électronique mesure les composantes en phase et en quadrature de la partie modulée :

$$\text{composante en phase} : \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} p_1(v) p_2(v) \cos \omega \frac{\ell}{v} n(v) v dv$$

$$\text{composante en quadrature} : \frac{S_0}{2} \int_0^{\infty} p_1(v) p_2(v) \sin \omega \frac{\ell}{v} n(v) v dv$$

Et le déphasage du faisceau sur son parcours a pour expression :

$$X = - \text{Arc tg} \frac{\int_0^{\infty} p_1 p_2 \sin \omega \frac{\ell}{v} n(v) v dv}{\int_0^{\infty} p_1 p_2 \cos \omega \frac{\ell}{v} n(v) v dv} \quad (12.1)$$

Le déphasage étant plus sensible que le module à une variation de fréquence, on exploite principalement les résultats relatifs à cette grandeur.

Application de la méthode. L'application de la méthode nécessite la détermination préalable de la loi de transmission $p_1(v)$ $p_2(v)$ ainsi que des hypothèses sur la forme du spectre.

a) Transmission par le cadmium. Soit $\Sigma_c(v)$ la section efficace macroscopique d'absorption du cadmium, elle s'obtient à partir des courbes données dans le BNL 325. Si e est l'épaisseur du cadmium, la probabilité d'absorption pour un faisceau perpendiculaire à la plaque s'écrit :

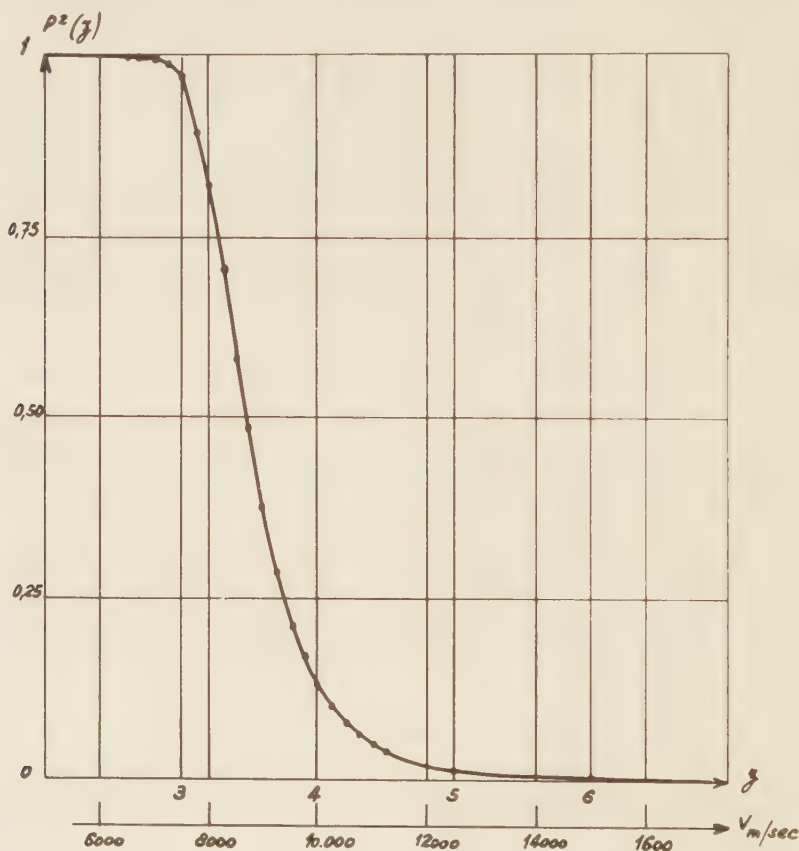


Fig. XII.1 - Loi de transmission dans le cas $e_1 = e_2 = 0,7$ mm

$$p(v) = 1 - e^{-\Sigma_c(v)e_1}$$

La résonnance voisine du domaine thermique pour le cadmium conduit à une probabilité d'absorption sensiblement égale à l'unité dans le domaine thermique et nulle au-delà d'une énergie dépendant de l'épaisseur du cadmium.

Sila cible est constituée par une plaque de cadmium d'épaisseur e_2 , la détection se faisant en mesurant à l'aide d'un scintillateur suivi d'un photomultiplicateur les photons de capture radiative, la loi de transmission a pour expression :

$$p_1 p_2 = [1 - e^{-\Sigma_c(v)e_1}] [1 - e^{-\Sigma_c(v)e_2}]$$

On a représenté cette loi sur la figure (XIII. 1) dans le cas $e_1 = e_2 = 0,7$ mm.

On constate sur cette figure que :

$$p_1 p_2 = 1 \quad \text{pour} \quad 0 < v < 7.500 \text{ m/s}$$

$$p_1 p_2 = 0 \quad \text{pour} \quad v > 12.500 \text{ m/s}$$

Le déphasage donné par la relation (12.1) est donc indépendant des neutrons de vitesse supérieure à 12 000 m/s et la méthode ne donne aucun renseignement sur la forme du spectre dans cette région.

b) Hypothèses sur la forme du spectre. Dans la région des vitesses inférieures à 12 000 m/s, on peut distinguer deux domaines physiquement différents, les domaines de ralentissement et d'équilibre thermodynamique. La vitesse v_t marquant la transition entre ces deux domaines dépend du pouvoir modérateur des noyaux cibles et de la vie moyenne des neutrons dans le milieu. Cette limite est assez floue. D'après la courbe donnée par Cohen [1], on peut évaluer la vitesse de transition à 6 000 m/s dans le cas de la pile EL. 2 et 5 500 m/s pour G 1 à la température ambiante. Le domaine thermique se situe ainsi dans une région où $p_1 p_2 = 1$.

Il est donc plus habile d'ajuster une loi analytique sur la portion thermique du spectre et pour cela de soustraire du déphasage X donné par la relation (12.1), le déphasage dû à la contribution des neutrons en ralentissement dont la vitesse est comprise entre v_t et 12 000 m/s.

Soit ϕ_t et ϕ_r les formes analytiques du spectre dans la région thermique et en ralentissement, on peut écrire (12.1) sous la forme équivalente :

$$X = - \text{Arc tg} \frac{\int_0^\infty \phi_t \sin \omega \frac{\ell}{v} dv + \int_{v_t}^\infty (p_1 p_2 \phi_r - \phi_t) \sin \frac{\omega \ell}{v} dv}{\int_0^\infty \phi_t \cos \omega \frac{\ell}{v} dv + \int_{v_t}^\infty (p_1 p_2 \phi_r - \phi_t) \cos \frac{\omega \ell}{v} dv}$$

X_c étant la valeur du déphasage pour les neutrons thermiques on peut introduire un terme correctif dX .

$$X = X_c + dX$$

$$\text{où :} \quad X_c = - \text{Arc tg} \frac{\int_0^\infty \phi_t \sin \frac{\omega \ell}{v} dv}{\int_0^\infty \phi_t \cos \omega \frac{\ell}{v} dv} \quad (12.2)$$

$$dX = - \frac{\text{tg } X_c}{1 + \text{tg}^2 X_c} \left\{ \frac{\int_{v_t}^\infty (p_1 p_2 \phi_r - \phi_t) \sin \frac{\omega \ell}{v} dv}{\int_0^\infty \phi_t \sin \omega \frac{\ell}{v} dv} - \frac{\int_{v_t}^\infty (p_1 p_2 \phi_r - \phi_t) \cos \frac{\omega \ell}{v} dv}{\int_0^\infty \phi_t \cos \omega \frac{\ell}{v} dv} \right\} \quad (12.3)$$

Pour le calcul du terme correctif dX , on peut admettre pour ϕ_t la répartition de Maxwell à la température du modérateur, et pour ϕ_r une loi théorique de ralentissement, par exemple :

$$\phi_r = \frac{4 n v_a \bar{z}_c}{\sqrt{\pi} \xi \Sigma_s} \frac{1}{v}$$

où $\bar{\Sigma}_c$ est la section efficace macroscopique d'absorption du coeur ;
 $\frac{1}{\xi \bar{\Sigma}_s}$, le pouvoir ralentisseur du modérateur.

La coupure v_c peut être prise pour simplifier, à l'intersection des lois ϕ_i et ϕ_r .

c) Ajustement du spectre des neutrons thermiques. Ayant calculé la valeur corrigée du déphasage, X_c , le problème se réduit à la recherche de la fonction ϕ_i qui satisfait au mieux à l'ensemble des valeurs (ω_i , X_{ic}).

L'ajustement se fait par la méthode des moindres carrés [2].

Le choix le plus simple est donné par une loi de Maxwell :

$$n(v) v = \left(\frac{v}{v_0}\right)^3 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \quad (12.4)$$

On recherche la valeur de la vitesse la plus probable qui rend minimum la somme des carrés des résidus. Les résidus permettent de calculer également l'erreur sur v_0 , si cette erreur est supérieure aux erreurs expérimentales, il faut rechercher une loi plus précise. Wigner et Wilkins [3] ont suggéré une loi de la forme :

$$n(v) v = \left(\frac{v}{v_0}\right)^3 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \left\{ 1 + a_1 \frac{v}{v_0} + a_2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \dots \right\} \quad (12.5)$$

où v_0 est la vitesse la plus probable correspondant à la température du modérateur.

On recherche la valeur des paramètres a_i rendant minimum la somme des carrés des résidus. Le nombre de paramètres significatifs est évidemment limité par les erreurs expérimentales. Dans le cas où la loi (12.5) représente mieux les résultats expérimentaux que la loi de Maxwell, avec des valeurs a_i non négligeables, il devient difficile de définir la température.

d) Calcul numérique. Si on introduit les formes (12.4) ou (12.5) dans la relation (12.2) en vue de calculer le déphasage théorique, on est conduit au calcul des intégrales :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_0^\infty z^n e^{-z^2} \frac{\sin \frac{x}{z}}{\cos \frac{x}{z}} dz \\ C_n(x) & \end{aligned} \quad (12.6)$$

où $x = \frac{\omega \ell}{v_0}$.

L'application pratique de la méthode, nous a montré qu'il était nécessaire de connaître les fonctions S et C avec sept décimales exactes, le calcul numérique étant fait sur une I.B.M. 650. En vue de ce calcul, A. Banchereau et P. Berthier [4] ont obtenu les développements suivants :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[x - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x^5 - \frac{1}{1890} x^7 - \frac{1}{340200} x^9 - \frac{1}{13097700} x^{11} - \frac{1}{91945854000} x^{13} - \dots \right] \\ &+ \frac{\pi}{48} \left[x^4 + \frac{1}{30} x^6 + \frac{1}{3360} x^8 + \frac{1}{907200} x^{10} + \frac{1}{479001600} x^{12} + \frac{1}{435891456000} x^{14} + \dots \right] \\ C_3 &= -x^4 \log x \left[\frac{1}{24} + \frac{x^2}{720} + \frac{x^4}{80640} + \frac{x^6}{21772800} + \frac{x^8}{11496038400} + \frac{x^{10}}{10461394944000} + \dots \right] \\ &+ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^2 + \alpha_4 x^4 + \left[\frac{\alpha_4}{30} + \frac{13}{10800} \right] x^6 + \left[\frac{\alpha_4}{3360} + \frac{1163}{67737600} \right] x^8 + \\ &+ \left[\frac{\alpha_4}{907200} + \frac{4441}{54867456000} \right] x^{10} + \left[\frac{\alpha_4}{479001600} + \frac{28573}{159335092224000} \right] x^{12} + \dots \end{aligned}$$

où $\alpha_4 = 0,05072957649920975$

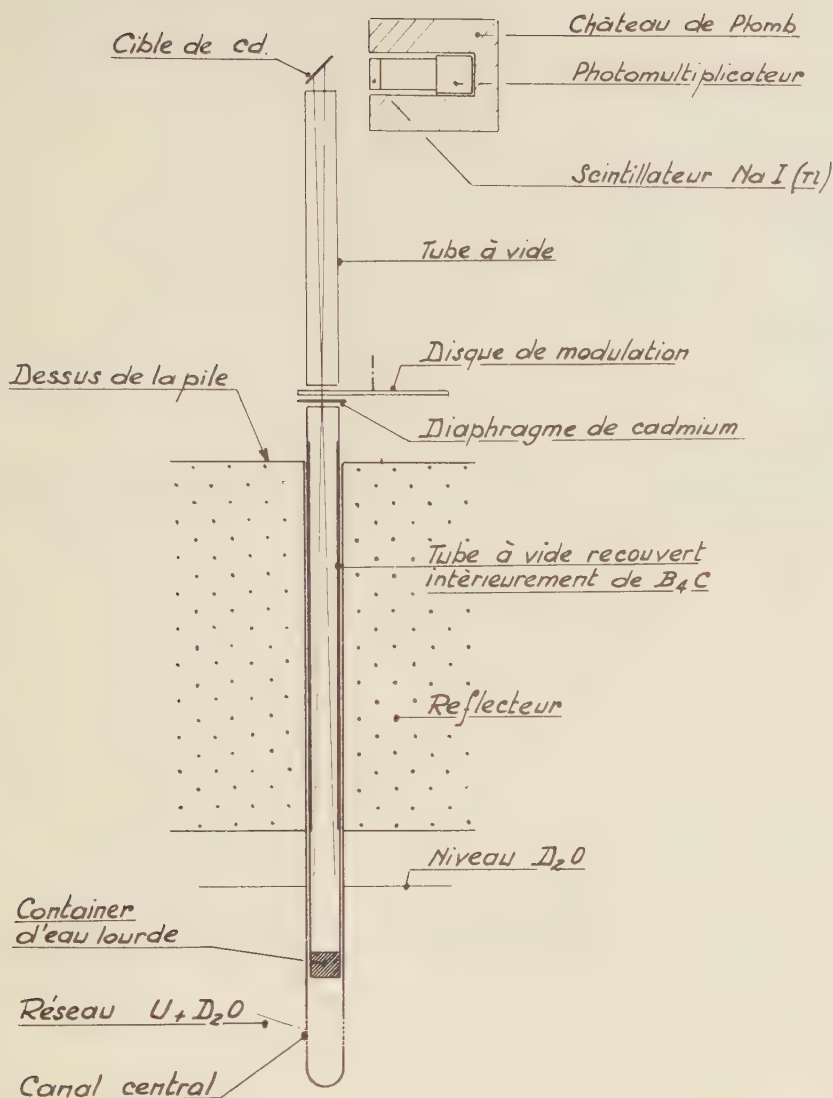


Fig. XII.2 - Dispositif expérimental pour la mesure du spectre des neutrons thermiques dans la pile EL.2.

canal central de la pile. Le point d'extraction est matérialisé par un container en aluminium ($\phi = 5$ cm, $H = 15$ cm) rempli d'eau lourde. Le tube à vide est constitué par un plongeur en aluminium ($\phi = 3,4$ cm, $H = 560$ cm) recouvert intérieurement de carbure de bore, le vide est maintenu à une valeur d'environ 10^{-2} mm de mercure. Le diamètre du faisceau au niveau du disque est limité à 0,9 cm par un diaphragme en cadmium. La cible située à 317 cm du disque est une pièce de cadmium de 10 cm de diamètre inclinée à 45° sur l'axe du faisceau. Les photons de capture radiative du cadmium sont mesurés par un scintillateur NaI (Tl) ($\phi = 3,6$ cm, $h = 5$ cm) situé à 20 cm de la cible, perpendiculairement au faisceau. Le scintillateur et le photomultiplicateur sont protégés latéralement par du plomb.

Le modulateur et l'appareillage de détection synchrone des impulsions sont identiques à ceux utilisés dans les expériences sur le libre parcours moyen de transport, décrites au chapitre précédent.

Un thermocouple préalablement placé dans le container a permis d'étalonner un thermocouple placé en un point du réseau. Par la suite, seul ce dernier est utilisé pour la mesure de la température du modérateur.

$$S_2 = -\frac{dC_3}{dx} \quad C_2 = \frac{dS_3}{dx}$$

$$S_4 = -\int C_3 dx$$

$$C_4 = \int S_3 dx + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

e) Précautions expérimentales. La méthode décrite permet de mesurer le spectre des neutrons thermiques du faisceau. Ce spectre est identique à celui du coeur à condition d'extraire le faisceau d'une région située dans le coeur de la pile, loin des bords, où le gradient de la distribution spatiale est nul. Les parois du canal où se propage le faisceau, situées dans le réflecteur, doivent être recouvertes par un matériau absorbant les neutrons, afin d'éviter que les neutrons en provenance de cette région ne pénètrent dans le faisceau. La diffusion et l'absorption des neutrons par l'azote et l'oxygène de l'air produit un affaiblissement du faisceau d'environ 5 pour cent par mètre, comme ces réactions dépendent de la vitesse, le spectre est déformé après un long parcours. Pour éviter cette déformation, le faisceau se propage dans un tube placé dans le canal où l'on maintient le vide à l'aide d'une pompe.

f) dispositif expérimental. Sur la figure (XII.2) on a représenté le dispositif expérimental sur la pile EL.2. Le faisceau est extrait du canal

g) Résultats expérimentaux sur la pile EL.2 [5]. Le container étant placé dans le canal en un point situé à 136 cm en dessous du plan libre de l'eau lourde, où le gradient est nul, on fait fonctionner la pile à une puissance de 200 KW et on mesure l'angle de déphasage X en fonction de la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$. Les résultats obtenus sont portés sur le tableau I.

$f = \frac{\omega}{2\pi}$	X mesuré	X_c corrigé
757,5 Hz	$245^{\circ}86 \pm 0,5$	247,3
706,5	230,83	232,3
673,5	222,15	223,6
639,2	213,03	214,5
589	198,32	199,8
538	183,44	184,9
505	174,83	176,2
420	149,47	150,7
335,5	123,26	124,4

Tableau I - déphasage mesuré et corrigé, faisceau issu du coeur de la pile EL. 2 en un point de gradient nul.

Si on ajuste une loi de Maxwell aux résultats obtenus au tableau I, on trouve pour la température des neutrons :

$$T_n = 359^{\circ} \pm 2^{\circ} \text{ K}$$

la température du modérateur durant cette expérience était :

$$T_m = 304^{\circ} \text{ K}$$

Les résidus étant de l'ordre des erreurs expérimentales, il est inutile de rechercher une loi du type Wigner Wilkins.

On peut donc conclure que la répartition des neutrons dans le coeur de la pile EL.2 est maxwellien, avec une température supérieure à celle du modérateur.

Nous avons ensuite modifié la température du modérateur et mesuré la température correspondante des neutrons, dans cette expérience on a admis que le spectre restait maxwellien et on s'est borné à mesurer l'angle de déphasage à la fréquence de 673,5 Hz. Les résultats obtenus sont portés au tableau II.

T_m	X	X_c	T_n
292,5	226,25	227,8	$342,6 \pm 2$
298	223,49	224,9	$354,6 \pm 2$
304	222,15	223,6	$358,7 \pm 2$
312,5	221,63	223,0	$361,3 \pm 2$

Tableau II - température des neutrons en fonction de la température du modérateur dans la pile EL.2.

Ces résultats portés sur la figure (XII.3) montrent que dans le cas de la pile EL.2, la température des neutrons ne varie pas linéairement avec celle du modérateur.

Nous avons ensuite constaté l'effet du gradient, en plaçant le container à 55 cm du plan libre de l'eau lourde. Dans cette région le gradient est négatif :

$$\lambda_t \frac{\text{grad } n}{n} \approx - 3,7 \%$$

et nous avons mesuré de nouveau l'angle de déphasage en fonction de la fréquence de modulation, la température du modérateur durant cette expérience était de 295° K , ces résultats étant portés au tableau III.

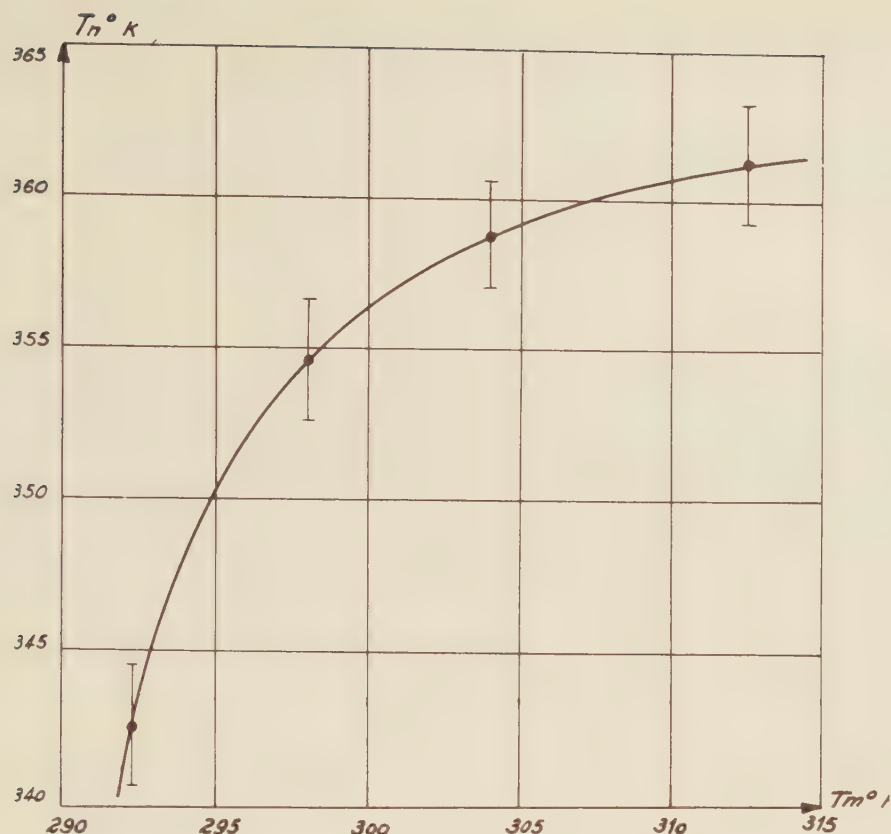


Fig. XII.3 - Température des neutrons T_n en fonction de celle du modérateur T_m dans la pile EL.2.

f	X	X_c
757,5	236,19	237,4
673,5	215,72	216,9
589	191,57	192,7
505	168,24	169,3

Tableau III - déphasage mesuré et corrigé, faisceau issu du coeur de la pile EL.2 en un point où le gradient a pour valeur :

$$\lambda_t \frac{\text{grad } n}{n} \cong - 3,7 \%$$

La température des neutrons du faisceau ainsi obtenue a pour valeur :

$$T_n = 391^{\circ}K$$

Si on se reporte au tableau II, on en déduit que pour une température de modérateur de $295^{\circ}K$, la température des neutrons dans la pile est de $345^{\circ}K$. La température des neutrons du faisceau est donc supérieure à celle des neutrons dans la pile de $46^{\circ}K$. C'est un effet considérable et qui illustre bien les précautions à prendre dans la conduite de ces mesures.

On a également effectué ces mesures sur la pile G.1 de Marcoule, les résultats obtenus sont décrits dans les rapports donnés en référence [6].

h) Sensibilité de la mesure aux différentes régions du spectre. Le principe de la mesure et le mode d'exploitation des résultats n'accordent pas la même importance aux différentes régions du spectre. On peut le voir de la façon suivante :

Superposons au spectre supposé Maxwellien un spectre perturbateur de neutrons de vitesse v_0 .

$$n(v) = M(v) + n_0 \delta(v - v_0) \quad (12.7)$$

Soit $X_0(\omega)$ l'angle de déphasage correspondant au spectre de Maxwell $M(v)$. L'angle de déphasage pour un spectre de la forme (12.7) est donné par la relation (12.1). On obtient :

$$X(\omega) = X_0(\omega) + \delta X$$

$$\text{avec :} \quad \delta X = K v_0 \sin\left(\frac{\omega l}{v_0} - X_0\right) \quad (12.8)$$

où K est une constante indépendante de ω .

La perturbation de l'angle de déphasage donné par l'expression (12.8) est proportionnelle à v_0 , donnant ainsi une importance plus grande à la région supérieure du spectre. Cependant le caractère le plus important de la perturbation réside dans sa forme périodique. En effet, le mode d'interprétation des résultats conduit à ajuster une courbe théorique à la courbe expérimentale représentant $X(\omega)$ en fonction de ω . Si le spectre est perturbé dans la région inférieure ($v_0 \ll \bar{v}$), la courbe expérimentale présentera des oscillations rapides. Celles-ci seront interprétées comme des erreurs expérimentales si on essaye d'ajuster un spectre théorique du type Wigner-Wilkins qui n'exhibe pas de telles oscillations. Par contre une perturbation dans la région supérieure du spectre n'engendre pas de telles oscillations de la courbe expérimentale et un spectre du type Wigner-Wilkins permet de tenir compte de la perturbation.

i) Critique de la méthode. La validité du spectre ainsi obtenu dépend du choix de la fonction d'essai. Cette difficulté est commune aux expériences de type intégral permettant la mesure de la température, comme la mesure par activation [7] ou par écran absorbant [8].

D'une façon générale, si $\phi(v)$ est la répartition réelle et $\psi(v)$ une fonction d'essai dépendant de paramètres arbitraires $a, b, c, \dots$, et que l'on considère une expérience dans laquelle on mesure un grandeur dépendant de la répartition, cette dépendance étant caractérisée par un opérateur connu, O , pouvant prendre la suite des valeurs O_i . La recherche de la fonction d'essai revient à déterminer les valeurs des paramètres rendant minimum l'expression :

$$R(a, b, c, \dots) = \sum_i [O_i (\phi - \psi)]^2 \quad (12.9)$$

Si la fonction d'essai coïncide avec la fonction de répartition, la relation (12.9) sera nulle quelle que soit la forme de l'opérateur O , c'est-à-dire quel que soit le type d'expérience effectué. Dans le cas contraire, il se peut qu'une fonction d'essai satisfaisante pour une expérience déterminée, d'après le critère (12.9) soit mauvaise pour une expérience de type différent. En particulier si l'on utilise la fonction ψ pour déterminer des valeurs moyennes de la répartition, par exemple les moments de la distribution :

$$v^n = \int_0^\infty \phi(v) v^n dv$$

On peut obtenir des valeurs erronées de ces moments si la fonction d'essai est mal choisie.

La mesure intégrale ne peut être utilisée avec une certitude suffisante quant au résultat que lorsqu'on connaît à priori la forme théorique de la distribution. Lorsqu'il y a doute sur cette forme, il faut effectuer une mesure différentielle avec un sélecteur de vitesse [9].

Cette mesure a été effectuée dans le cas de EL.2 sur un faisceau issu de la surface de séparation du coeur et du réflecteur [10]. Elle a permis de vérifier que le spectre est bien maxwellien et correspond à une température de $323^\circ \pm 15^\circ \text{K}$ pour une température du modérateur d'environ 313°K . Pour cette même température nous avons trouvé pour les neutrons issus du coeur dans une région de gradient nul, une température de neutrons de $361 \pm 2^\circ \text{K}$. Cet écart peut s'expliquer par la différence des points d'extraction du faisceau, la contribution du réflecteur devant conduire d'une part à un équilibre thermodynamique meilleur, d'autre part à un gradient nul ou légèrement positif dû à la remontée du flux dans le réflecteur.

BIBLIOGRAPHIE - CHAPITRE XII.

- [1] COHEN E.R. - NAA-SR - 1127 (1955).
- [2] MINEUR H. - Fascicule II - Gauthier-Villars (1938).
- [3] WIGNER E., WILKINS J.E. - Jr. AECD 2275 (USA EC declassified document).
- [4] BANCHEREAU A., BERTHIER P. - rapport SPM 247.
- [5] RAIEVSKI V., SAUTIEZ B. - Rapport C.E.A. - à paraître.
- [6] RAIEVSKI V., SAUTIEZ B. - Rapport SPM 308 (1957) et rapport C.E.A.
- [7] TOLSTOV K.D., SHAPIRO F.L., STRANICH J.V. - Séances de l'Académie des Sciences de l'URSS (juillet 1955).
- [8] KUCHLE - Institut de Physique Max-Planck - Cöttingen n° 7 (56/40) (1956).
- [9] HUGHES D.J. - Pile neutron research - Addison - Wesley (1953).
- [10] GALULA M., JACROT B., NETTER F. - Jr. de physique et le radium - Tome 16, mars 1955, p. 232-233.

CONCLUSION

On a montré que la méthode de modulation permettait une étude précise et complète des milieux contenant des neutrons.

La précision résulte de l'élimination des composantes du bruit de fond de fréquence différente de celle du signal.

Le champ d'application de cette méthode est extrêmement vaste et récemment, le Dr Eriksen et son équipe, au Centre Nucléaire de Kjeller ont étudié avec succès par ce procédé les phénomènes liés à l'ébullition dans les piles modérées à l'eau lourde

Pratiquement toutes les perturbations de faible valeur ont intérêt à être mesurées par ce procédé.

La méthode n'est cependant pas limitée à ces applications pratiques. Le milieu où règne une densité périodique de neutrons est équivalent à un milieu ayant des propriétés différentes au point de vue de l'absorption, on peut ainsi déterminer des grandeurs fondamentales de ce milieu.

Dans le domaine des piles, la méthode de modulation est principalement intéressante au niveau de la criticalité. Pour des milieux très sous-critiques, la perte par fuite de neutrons devient trop importante comparée à la perte par absorption. Les méthodes statiques ou celles utilisant des sources pulsées deviennent alors plus intéressantes.

APPENDICE

Cet ouvrage comporte une partie théorique et une partie expérimentale.

La partie théorique est constituée par les chapitres I à VII.

Les chapitres I à III sont des rappels sur des questions classiques mais nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Ils sont extraits des ouvrages cités dans les listes bibliographiques établies en fin de chapitres.

L'étude théorique de la modulation a été faite par Weinberg et Schweinler dans le cadre de la théorie de l'âge. L'étude dans le cadre de la théorie à deux groupes qui est propre à cet ouvrage suit d'assez près l'exposé de ces auteurs. Elle présente l'avantage de s'appliquer au cas de la pile munie d'un réflecteur.

Dans cette partie, nous avons introduit un opérateur de perturbation cinétique P et montré que la solution utilisant le développement en fonctions propres pouvait s'obtenir par une résolution directe des équations de la cinétique.

La méthode de calcul utilisant le développement en fonctions propres est donné d'une façon aussi complète que possible. On a en particulier explicité les fonctions dépendant des deux valeurs propres prises par le paramètre λ dans le cas de la pile sans réflecteur. On a montré qu'il était possible d'utiliser un système de base approché donnant une solution très voisine de la solution rigoureuse et conduisant à des calculs plus simples. J'ai été aidé dans cette partie par les discussions que j'ai eues avec Monsieur Lago, Ingénieur au Groupe Calcul du Service de Physique Mathématique.

La partie expérimentale comprend une description générale de l'appareillage donnée au chapitre VIII. Les appareils électriques et électroniques utilisés dans les premières expériences ont été étudiés par l'auteur, par la suite on a utilisé des appareils plus perfectionnés mis au point par Monsieur Le Baud.

Parmi les expériences décrites dans les chapitres suivants, l'étalonnage des barres de réglage, le pilotage en régime sous critique, la mesure du l.p.m. de transport et l'étude du spectre des neutrons sont entièrement originales.

Le contrôle de pureté nucléaire des matériaux par oscillation était une méthode connue et assez largement utilisée à l'époque où ces expériences ont été faites. L'application de cette méthode par utilisation de la composition des signaux local et d'ensemble et la mesure du déphasage du signal résultant est nouvelle. Cependant son domaine d'application est limité à la géométrie particulière de la pile et ne peut être étendue avec le même succès à une géométrie quelconque.

L'utilisation d'une excitation périodique pour l'étude des caractéristiques d'une pile a été faite indépendamment par l'auteur, mais au moment de la publication des résultats ainsi obtenus, le rapport de C. W. Gilbert et G. J. Fergusson (CRP 377/1948) décrivant les expériences effectuées par cette méthode au Canada, était déclassé. L'antériorité appartient donc à ces auteurs. Cependant la méthode exposée dans cet ouvrage comporte des caractères nouveaux non négligeables : utilisation de fréquences élevées pour s'affranchir de l'effet des neutrons retardés, détermination de la réactivité par modulation, réalisation pratique au moyen de secteurs cylindriques tournants. L'interprétation des résultats par une loi linéaire présente également un intérêt certain.

Dans le rapport CEA n°917, qui forme une suite à cet ouvrage, la théorie des fluctuations statistiques est étendue au cas dépendant de l'espace.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Remerciements	3
INTRODUCTION	5
CHAPITRE I.	
<u>Rappel de notions élémentaires de physique nucléaire</u>	7
réactions nucléaires	
sections efficaces	
CHAPITRE II.	
<u>Théorie du transport</u>	9
Cas des neutrons thermiques	
Cas des neutrons en ralentissement	
CHAPITRE III.	
<u>Solution de l'équation de transport dans l'approximation des groupes de vitesses, par la</u> <u>méthode des harmoniques.</u>	13
Validité de l'approximation P_n	
Approximation P_1	
Equation élémentaire de la diffusion	
CHAPITRE IV.	
<u>La théorie des piles à neutrons thermiques dans l'approximation de la diffusion à deux</u> <u>groupes de vitesse.</u>	19
Equation de la diffusion pour les groupes rapide et thermique, dans le cœur et le réflecteur.	
Equation matricielle.	
Choix du système de base.	
Calcul des fonctions propres.	
CHAPITRE V.	
<u>La perturbation périodique</u>	25
Cas des faibles fréquences, développement dans le système de base statique.	
Système de base approché.	
Application au cas de la perturbation.	
Périodique du coefficient de multiplication.	
Génération de termes harmoniques due à la non linéarité des équations.	
CHAPITRE VI.	
<u>Perturbation due à un absorbeur</u>	35
Absorbeur statique.	
Absorbeur d'amplitude oscillante.	
Absorbeur de position oscillante.	
Domaine de validité du développement dans le système de base statique, importance des harmoniques.	
Comparaison des différentes piles pour l'excitabilité des modes harmoniques par un absorbeur oscillant.	
CHAPITRE VII.	
<u>Solution directe dans le cas de la perturbation périodique</u>	43
Application au cas de l'absorbeur d'amplitude oscillante dans une pile sphérique nue.	
Convergence du développement en fonctions propres - identité avec la solution directe.	
Validité du système de base approché.	

CHAPITRE VIII.	
<u>Dispositif de mesure</u>	51
Détection synchrone.	
Redresseur synchrone pour courant.	
Intégrateur de courant, circuit RC, vélodyne.	
Redresseur synchrone pour impulsions.	
CHAPITRE IX.	
<u>Contrôle de la pureté nucléaire des matériaux</u>	61
Dispositif expérimental.	
Avantage de la méthode d'oscillation de Fontenay-aux-Roses.	
CHAPITRE X.	
<u>Détermination de la vie moyenne et mesure de la réactivité dans une pile</u>	65
Rôle des neutrons retardés dans la modulation.	
Dispositif expérimental.	
Résultats expérimentaux.	
Etalonnage des barres de réglage, précautions à observer.	
Pilotage d'une pile en régime sous critique.	
Déphasage en régime dynamique.	
CHAPITRE XI.	
<u>Mesure du libre parcours moyen de transport des neutrons thermiques</u>	79
Principe.	
Mesure de la longueur de diffusion complexe.	
Mesure du λ_t de l'eau lourde.	
Mesure du λ_t du graphite.	
Validité de l'approximation monoénergétique.	
CHAPITRE XII.	
<u>Mesure de la température des neutrons dans une pile</u>	87
Principe.	
Hypothèses sur la forme du spectre.	
Calcul numérique.	
Dispositif expérimental.	
Spectre des neutrons thermiques de la pile à eau lourde EL. 2.	
Effet du gradient sur la forme du spectre.	
Sensibilité de la mesure aux différentes régions du spectre.	
Critique des méthodes de mesure intégrale.	
CONCLUSION	97
<u>Appendice</u>	99

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

FLUCTUATIONS STATISTIQUES DU NOMBRE DE NEUTRONS DANS LES PILES

Vu et approuvé
Paris, le 17 Avril 1959
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
J. PERES

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris
Jean SARRAILH

IMP. LOUIS-JEAN — GAP

Dépôt légal n° 185 — 1959

